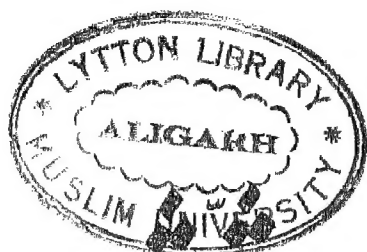




توانا بود سرکه دانا بود



# کتاب مسلمات

سال چهارم دبیرستانها

تألیف

مشارف المصطفی  
مفتی اعظم پاکستان  
دہلی نو

جناب آقای محمد وحید

آقای تقی فاطمی استاد دانشگاه

حق چاپ محفوظ

۱۳۲۲

چاپخانه سیروس تهران

M.A.LIBRARY, A.M.U.



PE1180

# مثلات<sup>۹</sup>

## مقدمه و تعریف

۱- کشودن سه گوشه - در هند سه دیده ایم که مجموع گوشه های یک سه گوشه برابر با دو گوشه راست است . بنابراین هرگاه دو گوشه از یک سه گوشه داده شده باشد سومی معین است .

پس میتوان برای هر سه گوشه فقط پنج جز در نظر گرفت : سه پیکر و دو گوشه - و در بنده سال قم ( از سنه ۳۳ تا ۴۱ ) ثابت شده که هرگاه سه جز از این پنج جز داده شود میتوان سه گوشه را کشید ( در حالت کلی ) و پس از کشیدن سه گوشه میتوان جزهای داده نشده را اندازه گرفت - در خصوص کوئیم سه گوشه از راه هندسی گشوده شده است

مثال - از یک سه گوشه دو پیکر و گوشه میان آنها درست است :

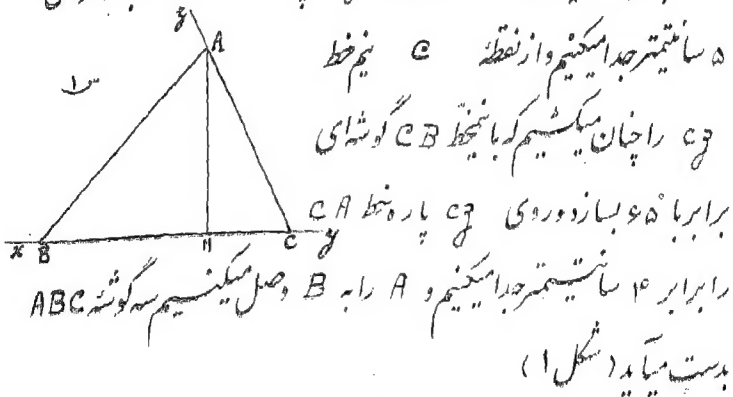
$$a = 5 \text{ سانتیتر} \quad b = 4 \text{ سانتیتر} \quad c = 6.5$$

آنگاه بشاید

قرار بر این میگذاریم که در سه گوشه  $ABC$  پهلوی روبروی تارک  $A$  را  $a$  و پهلوی روبروی  $B$  و  $C$  را به ترتیب  $b$  و  $c$  نامیده و گوشه تارک ما را به نام تارک  $\hat{A}$  بنامیم.

برای کشیدن سه گوشه نخست آنرا از روی جزئیات داده شده میکشیم و از روی شکل جزئیاتی دیگر را اندازه میگیریم.

برای کشیدن سه گوشه روی خط  $xy$  پاره خط  $BC$  را برابر ازای



حال گوشه های  $A$  و  $B$  را با نقاله و درازای پهلوی  $AB$  را با ستاره اندازه میگیریم تقریباً چنین میشود:

$$AB = C = ۴۹ \text{ mm} \text{ و } \hat{A} = ۳۰^\circ ۶' \text{ و } \hat{B} = ۳۱^\circ ۴۷'$$

یک امتحان دستی شکل و عمل این است که سه گوشه  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  رویم برابر دو گوشه راست باشد.

توضیح - این عددی که برای نشان دادن است آوردیم کاملاً درست نیست و تقریباً  
زیر باقیاله تنها می‌توان گوشه را تا نیم زین (درجه) تقریباً معین کرد و با ستاره  
هم اندازه  $AB$  تنها تا نیم میلی متر تقریباً معین می‌شود

ولی در سندهای دیگر ممکن است در موقع کشیدن شکل هم تقریباً  
لازم باشد و در نتیجه شکلی که بدست می‌آید کاملاً مانند شکل اصلی نباشد  
فرض کنیم در مثال بالا بجای عدد های ساده داده شده عدد های زیر را

$$\text{میدانند: } \alpha = ۵۰.۴۳ \text{ و } \beta = ۴۰.۳۲, \hat{C} = ۱۰.۵۵$$

برای اینکه بتوانیم شکل را در روی کاغذ بکشیم باید اندازه پهلوی  $\alpha$  و  $\beta$  را  
کوچک نمود مثلاً اگر به هر متر را با یک سانتیمتر نمایش دهیم باستی سه گوشه ای  
با زیم که پهلوی آن کی  $۵۰.۴۳$  سانتیمتر و دیگر  $۴۰.۳۲$  سانتیمتر باشد ولی  
چون باسندهای آنی که درست است کشیدن درازای کمتر از میلی متر روی کاغذ  
آسان نیست از سد سانتیمتر یا این چشم می‌پوشیم و  $\alpha$  و  $\beta$  را به ترتیب  $۵$  و  $۴$   
سانتیمتر نمایش می‌دهیم

پس چنانچه باقیاله می‌توان کمتر از نیم زین را درستی روی کاغذ برد  
از  $۱۰$  دقیقه نیم چشم پوشیده  $\hat{C}$  را  $۶۵$  می‌گیریم.  
در نتیجه شکل (۱) بدست می‌آید.

و اگر این سه گوشه زمینی باشد که هر متر مربع آن ده دینار بریزد (بمطابق ۱۰۰۰ ریال) برای بدست آوردن ارزش زمین بایستی پهنه آن را متعین کنیم و برای این منظور کافی است مثلاً درازای  $AH$  را بدانیم (زیرا درازای  $BC$  داده شده است) و  $AH$  را از روی شکل (۱) که بدقت کشیده شده اندازه بگیریم تقریباً ۳۶۰۰ متر است که نمایش ۳۶۰۰ متر باشد - پس پهنه زمین از روی شکل چنین است :

$$\frac{1}{2} a \times AH = \frac{1}{2} \times 5043 \times 3600 = 9077400$$

و ارزش آن بنا برین ۹۰۷۷۴۰۰ ریال خواهد بود .

ولی از راه محاسبه دقیق مثلثاتی (چنانکه درین کتاب خواسیم دیدیم معلوم میشود که پهنه سه گوشه داده شده ۹۳۴۱۰۰۰ متر مربع و بنا برین ارزش آن ۹۳۴۱۰۰۰ ریال است یعنی میان دو نتیجه (محاسبه دقیق و آنچه از روی کشایش بندی بدست آمده) ۲۶۳۶۰ ریال تفاوت است .

این تفاوت در نتیجه تقریبهاست که در کشیدن شکل و اندازه گیریهایی نمودیم - و اگر گوشه  $C$  خیلی کوچک مثلاً ده پانزده درجه میبود باز تفاوت زیاد میشد .

موضوع علم مثلثات مقدماتی آموختن آنرا به گوشه ها است  
از راه محاسبه دقیق یعنی حساب کردن جرمهای شانس آنهاست از روی

جزرهای داده شده.

## وزرش و پرش

پرش - غرض از گشودن سه گوشه چیست؟

۱- سه برهای راست گوشه زیر را از راه هندسی بکشاید (گوشه راست را)

$$C \text{ می‌نامیم): } c = 7 \text{ متر, } A = 15^\circ$$

$$b = 20 \text{ متر, } B = 50^\circ$$

$$a = 5 \text{ سانتیمتر, } B = 65^\circ$$

$$c = 57 \text{ سانتیمتر, } a = 35 \text{ سانتیمتر}$$

$$b = 67 \text{ کیلومتر, } a = 42 \text{ کیلومتر}$$

۲- سه برهای زیر را از راه هندسی بکشاید

$$\hat{A} = 40^\circ, B = 75^\circ, 30^\circ, a = 18 \text{ متر}$$

$$\hat{A} = 26^\circ, \hat{C} = 43^\circ, 30^\circ, b = 67 \text{ متر}$$

$$c = 32 \text{ سانتیمتر, } B = 41^\circ, a = 67 \text{ سانتیمتر}$$

$$c = 45 \text{ سانتیمتر, } A = 70^\circ, b = 15 \text{ سانتیمتر}$$

$$b = 45 \text{ کیلومتر, } a = 2 \text{ کیلومتر, } c = 42 \text{ کیلومتر}$$

$$b = 44 \text{ متر, } a = 5 \text{ متر, } c = 8,9 \text{ متر}$$

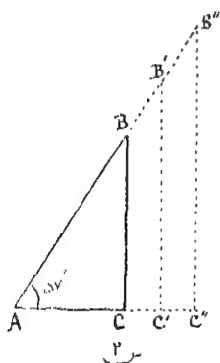


$$A = 10^\circ \quad \text{تر } a = ۷,۴ \quad \text{تر } b = ۳,۴$$

$$C = 95^\circ \quad \text{تر } c = ۲ \quad \text{تر } b = ۳$$

$$A = ۳1^\circ \quad \text{تر } b = ۶۱ \quad \text{تر } a = ۵۲$$

۲- عدد مانیکه بستگی به گوشه ندارند فرض کنیم در سه برابر است گوشه  
 ACB که در آن گوشه C راست است (ش ۲) گوشه A برابر با ۵۷ درجه  
 AC برابر با ۳ یک درازا (مثلاً سانتیمتر) باشد. اگر این سه برابر بقت کشیده  
 BC را اندازه بگیریم خواهیم داشت:



$$BC = ۴,۶ \text{ سانتیمتر}$$

حال اگر بدون اینکه گوشه A دست بزنیم  
 AC برابر با ۴ سانتیمتر یا ۵ سانتیمتر بگیریم نسبتی که C  
 بوضع C' یا C'' درآید مانند پیش BC و C'B' را

اندازه بگیریم خواهیم داشت:  $B'C' = ۱۵,۶$  سانتیمتر  $B''C'' = ۷۷,۷$  سانتیمتر  
 از روی این اندازه ها دیده میشود که در هر مورد نسبت درازای B'C' برابر است

AC نسبت عددی است پایا (ثابت)

$$\frac{B'C'}{AC} = \frac{B''C''}{AC} = \frac{B'C'}{AC} = ۱,۵۲$$

(پایا بودن این نسبتها از راه هندسی اثبات میشود)

پس نسبت  $\frac{BC}{AC}$  عددی است که بستگی به درازای پهلوی‌های سه‌بند دارد  
(زیرا با تغییر کردن آنها تغییر نمیکند) و فقط بستگی دارد به گوشه  $A$  (یا  $B$  که  
متمم آنست)

همچنین است نسبت‌های  $\frac{AC}{AB}$  و  $\frac{BC}{AB}$  که بستگی به گوشه  $A$  (یا  $B$ ) دارند  
و به درازای پهلوی‌ها بستگی ندارند

و درشش گوشه  $A$  را به ترتیب برابر ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ گرفته  
نسبت‌های  $\frac{BC}{AC}$  و  $\frac{AC}{AB}$  و  $\frac{BC}{AB}$  را در هر مورد تعیین کنید.

تعریف - مثلثات مقداتی علی است که در آن از عدد‌ها و نسبت‌هایی که  
تنها بستگی به گوشه دارند بحث میشود و بوسیله آن میتوان سه گوشه‌ها را  
از راه محاسبه کشود

### پیشش‌های ساده

۱- در یکی از ساعت‌های روز سایه درختی ۱۵ متر و سایه یک تکیه چوب شاخولی دو متری

سه متر بود - درازای درخت چقدر است!

۲- بلندی دیواری سه متر است نزدیک آن دیوار درختی است به بلندی پنج متر -

وقتی سایه درخت چهار متر میشود سایه دیوار چه اندازه خواهد بود؟

# بخش نخست

## ۱- یکه های مکان نوشته

۳- یکه های مکان - برای اندازه گرفتن کمانهای دایره یکه های چند بکار

میسازند:

الف - زینیه (درجه) - و آن  $\frac{1}{360}$  پیرامون دایره است یعنی کمانی است که ۳۶۰ مرتبه در پیرامون دایره می گنجد.

جزء های زینیه دقیقه است و ثانیه:

دقیقه برابر  $\frac{1}{60}$  زینیه و ثانیه برابر  $\frac{1}{60}$  دقیقه است پس ثانیه برابر  $\frac{1}{3600}$  زینیه است - اندازه پاره های مکان را که از ثانیه کوچکتر باشند با دایگان ثانیه نمایش میدهند.

اگر اندازه کمانی از یک دایره ۱۲ زینیه و ۱۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه و  $\frac{1}{2}$  ثانیه باشد آنرا چنین بنویسند:

۳، ۴۵، ۱۵، ۱۲

تبصره - بنا بر آنچه گفتیم اگر در دایره پیرامون دایره  $\odot$  مکان  $AB$  بنا بر  $\frac{1}{360}$  پیرامون بنا برین یک زینیه باشد این مکان یکه کمانهای این دایره است.

حال اگر دایره دیگری بکشیم که پرتوش نیمه پرتو دایره  $O$  باشد و آن دایره  $\Gamma$  را  
 $\overline{AB}$  برابر یک زینه باشد دیده میشود که درازای  $AB$  با درازای  $\overline{A'B'}$  تفاوت اند  
 (چرا؟)

بنابراین وی دایره های مختلف گانها یک به حسب زینه برابرند بحسب درازای  
 نیستند و درازای آنها (چنانکه در هندسه ثابت میشود) متناسب است با پرتو آن  
 دایره ها (در مورد دو دایره بالا  $\overline{AB} = 2 \overline{A'B'}$ )

پس درازای گان بستگی دارد به شماره زینه های آن هم به درازای پرتو دایره  
 آیه آن گان پاره ای از آن است

اگر  $l$  درازای  $n$  اندازه گان به حسب زینه (و یا شماره زینه های آن)  
 و  $e$  درازای پرتو دایره باشد ( $e$  و  $e$  هر دو به حسب یک یک درازا)  
 داریم:

$$(1) \quad l = \frac{2\pi en}{360} = \frac{\pi en}{180}$$

ب- گراد و آن گانیت برابر  $\frac{1}{40}$  پیرامون دایره - جزئیات  
 آن دقیقه است (دقیقه قسمتی) که یکم گراد باشد و ثانیه قسمتی که  $\frac{1}{100}$   
 دقیقه قسمتی و یا  $\frac{1}{10000}$  گراد است.

۱۸ گراد و ۵ دقیقه و ۳۷ ثانیه را چنین نویسند

۱۸° ۵' ۳۷"

۱۸٫۵۳۷

و یا

چنانکه دیده میشود هرگاه کانی با گراد و جزئیهای گراد سنجیده شود اندازه آن با یک عدد دهمی نموده میشود در صورتیکه اگر با زین و جزئیهای زین سنجیده شود اندازه آن یک عدد دهمی نیست.

مانند پیش اگر چه درازا و نیز اندازه گان بحسب گراد و درازای پرتو دایره باشند داریم:

$$(۲) \quad \frac{r}{R} = \frac{2\pi R \sin \frac{\theta}{2}}{2\pi R} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

ج - رادیان<sup>(۱)</sup> - زین و گراد برای محاسبه های عددی بکار برده میشود ولی در ثابت کردن قضیه تا بیشتر درستی مثلثاتی یکدیگر را میسوزند بنام رادیان دینی کانی برابر پرتو و آن کانی است از دایره که درازایش با پرتو دایره است یعنی اگر درازای پرتو دایره ای مثلاً دو متر باشد درین دایره رادیان کانی است بدرازای دو متر.

در هندسه ثابت میشود که نسبت درازای پیرامون به دایره به پرتو



الف - درازای کان ۲۵ یک متر باشد .

ب - کان ۴۵ گراد دو متر و نیم باشد .

ج - کان یک راویان سه متر باشد .

۴ - یک مای گوشه - در هند سه ثابت شده است که اندازه گوشه مرکزی ( گوشه ای که تارکش در مرکز دایره است ) همان اندازه کان روبروی آن است بشرط آنکه یک گوشه گوشه ای باشد مرکزی روبرو به یک کان - ازین ویکه مائی را که برای اندازه گرفتن گوشه بکار میسوزند همان نام یک مای کان مینامند :  
الف - در دستگاه شست قسمتی ( زینه ) یک گوشه زینه است و آن گوشه است مرکزی روبرو به کانیک که برابر یک زینه باشد چون یک گوشه راست مرکزی و بزرگانی است برابر چهار یک پرامون دایره و یا برابر ۹۰ زینه پس میتوان نیز گفت که زینه یک نودم (  $\frac{1}{9}$  ) یک گوشه راست است .

و قیقه و ثانیسم بهمین ترتیب تعریف میشود .

ب - در دستگاه دهمی یک گوشه گراد است و آن گوشه است مرکزی و بزرگانی یک گراد می و یا  $\frac{1}{10}$  گوشه راست است .

ج - راویان گوشه است مرکزی روبرو به کانیک برابر پرتو ( یعنی کانیک که

در انجمن برابر درازای پرتو است ) کانیک راویانی (

بنابر آنچه گفت شد میتوان ازین پس بدون اینکه ابهامی باشد بجای گوشه  
کمان در نظر گرفت و بعکس مثلاً میتوان بجای یک کمان ده زینه گوشه ده  
زینه در نظر گرفت یعنی گوشه ای مرکزی روبروی آن کمان و بعکس.

۵- تبدیل یک - هرگاه اندازه گوشه ای دیاگانی (جیب کی از یکه) مادرست  
باشد و بخواهیم اندازه آن را بجیب کی دیگر از یکه باشد بناسیم بهتر این است که نخست  
آن گوشه را دیا آن کمان را با یک گوشه راست (و یا با چهار یک پیرامونی) بر  
بنچیم و پس آن را تبدیل کنیم:

مسئله ۱- اندازه گوشه  $۹۷۵۳۴۵$  گراد را بجیب زینه بدست آورید  
چون گوشه راست  $۱۰۰$  گراد است پس این گوشه  $۹۷۵۳۴۵$  را گوشه  
راست است حال چون گوشه راست  $۹۰$  زینه است پس این گوشه برابر با

$$۸۷,۷۸۱۰۵۰ = ۹۰ \times ۹۷۵۳۴۵ \text{ زینه است}$$

ولی  $۷۸۱۰۵ / \text{زینه} = ۶۰ \times ۷۸۱۰۵$  دقیقه یا  $۶۰ \times ۸۶۳$  دقیقه

و  $۸۶۳ / \text{دقیقه} = ۶۰ \times ۸۶۳$  ثانیه یا  $۵۱,۷۸$  ثانیه است

بنابراین

$$۹۷۵۳۴۵ = ۸۷^{\circ} ۴۶'$$

مسئله ۲- گوشه  $۸۷^{\circ} ۴۶'$  را به گراد تبدیل کنید



$$۵۱,۷۸ \text{ برابر است با } \frac{۵۱,۷۸}{۶} \text{ دقیقه} = ۸,۶۳ \text{ دقیقه}$$

$$۴۶,۸۶۳ \text{ برابر است با } \frac{۴۶,۸۶۳}{۶} \text{ زینه} = ۷,۸۱۰,۵$$

$$۱۷,۷۸۱۰,۵ = \frac{۱۷,۷۸۱۰,۵}{۹۰} \text{ گوشه راست} = ۹۷۵۳۴۵ \text{ گوشه راست}$$

$$۹۷۵۳۴۵ \text{ گوشه راست برابر است با } ۹۷,۵۳۴۵ \text{ گراد.}$$

مسئله ۳- همین گوشه را با رادیان بسنجید.

گوئیم این گوشه برابر است با  $۹۷۵۳۴۵$  گوشه راست و چون هر گوشه راست

برابر است با  $\frac{\pi}{۴}$  رادیان پس این گوشه  $\frac{\pi}{۴} \times ۹۷۵۳۴۵$  رادیان

یا تقریباً  $۱,۵۳۲$  رادیان است:

$$۱,۵۳۲ \text{ رادیان} = ۸۷,۴۶۵۳۴۵ \text{ گراد} = ۹۷,۵۳۴۵ \text{ رادیان}$$

مسئله ۴- مکان  $\frac{۷\pi}{۱۱}$  رادیان را با گراد یا با زینه بسنجید.

گوئیم  $\frac{\pi}{۴}$  رادیان  $۱۰۰$  گراد است پس یک رادیان  $\frac{۴۰۰}{\pi}$  گراد است

$$\frac{۷\pi}{۱۱} \text{ رادیان برابر با } \frac{۷\pi}{۱۱} \times \frac{۴۰۰}{\pi} \text{ گراد} = \frac{۲۸۰۰}{۱۱} \text{ گراد یا}$$

$$۲۵۴,۵۴۵ \text{ گراد است}$$

$$\frac{۷\pi}{۱۱} \text{ رادیان} = ۱۲۶,۲۷۰ \text{ زینه}$$

برای تبدیل زینه گوئیم  $\frac{\pi}{۴}$  رادیان  $۹۰$  زینه است پس یک رادیان

$$\frac{۱۸۰}{\pi} \text{ زینه است و } \frac{۷\pi}{۱۱} \text{ رادیان برابر با } \frac{۱۸۰}{\pi} \times \frac{۷\pi}{۱۱} \text{ زینه} = \frac{۱۲۶۰}{۱۱} \text{ زینه}$$

$\dots ۱۱۴,۵۴۵۴ =$  زینیه است و باید اینجا دهگان زینیه را بدقیقه و ثانیه  
بمبدل نمود:

$\dots ۵۴,۵۴$  زینیه برابر است با  $\dots ۵۴,۰۰ \times ۰,۰۰۰$  دقیقه و یا  $\dots ۳۲,۷۲۷۲$  قسبه

و  $\dots ۷۲,۰۰$  دقیقه =  $\dots ۷۲,۰۰ \times ۰,۰۰۰$  ثانیه و یا  $\dots ۴۳,۶۳۶۳$  ثانیه

پس  $\dots ۶۳,۰۰$   $\dots ۳۳$   $\dots ۳۲$   $\dots ۱۱۴ = \frac{۷۲}{۱۱}$  رادیان .  
۶- در ضمن کشودن مسئله ۲ دیده شد که :

$\dots ۴۴,۱۷$   $\dots ۵۷ = \frac{۱۸۰}{\pi}$  زینیه = ۱ رادیان

$\dots ۶۶,۱۹$   $\dots ۶۳ = \frac{۲۰۰}{\pi}$  گراد = ۱ رادیان

چون  $\pi$  عدایت گنگ (جبرنوم ۱۴) این عدد دهر و تقریبی است

۷- دستور کلی برای تبدیل کیه - اگر اندازه های یک مکان بحسب

رادیان و زینیه گراد تبرقیب  $\dots$  و  $\dots$  باشد و درازی این مکان را

که از روی دستورهای (۱) و (۲) و (۳) بدست میآید با هم بسنجیم خواهیم  
داشت :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{n}{۱۸۰} - \frac{n'}{۲۰۰} \quad (۴)$$

از روی وستیکی (۴) هرگونه مسئله تبدیل کیه را میتوان کشود : مثلاً اگر

$\alpha$  یعنی اندازه مکانی (یا گوشه ای) را بحسب رادیان بشناسیم بنا به (۴)  $n$  یعنی

شماره زینه های آن چنین خواهد بود :

$$n = \frac{180}{\pi} \alpha$$

این عدد را که با این ترتیب بدست می آید برابر شماره زینه های آن است و در همان  
این عدد را باید به دقیقه و ثانیه تبدیل نمود .

### ورزش

۱- یک زینه و یک گراد را به حسب رادیان حساب کنید .

۲- اندازه گوشه های زیر را بحسب زینه بدست آورید :

$$3, 4 \text{ رادیان} , \frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{8} , \frac{2\pi}{3} , \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{5}$$

$$26, 78, 56, 18^\circ, 15^\circ, 29, 45, 06$$

۳- اندازه گوشه های (یا کمانهای) زیر بحسب رادیان چیست ؟

$$22^\circ 30' , 90^\circ , 25^\circ , 60^\circ , 45^\circ , 30^\circ$$

$$78, 18, 95, 75^\circ, 5^\circ, 12^\circ 34'$$

۴-  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان و  $\frac{4}{3}\pi$  رادیان هر یک برابر چند گوشه راست میباشند؟

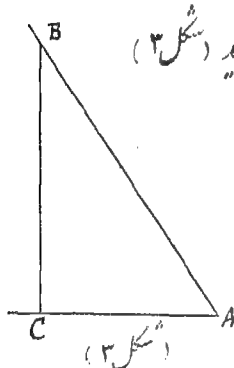
۵- مدت ۳۶ دقیقه هر یک از عقرب های ساعت چند رادیان میگردند؟

۶- میان برد قطر (چرخ جلوی درشکه ای) کمتر و میان برد چرخ عقب آن ۱۲۰

- سایتم تر است - وقتی چرخ جلو ۷۰۰ می گردد چرخ عقب چند رادیان خواهد گشت؟
- ۷- در یک شبانه روز زمین چند رادیان گردش خود میگرد؟
- ۸- چرخ ۳۰۰۰ دور در یک ساعت میگردد در یک ثانیه چند رادیان میگرد؟  
(یعنی سندی گردش آن چند رادیان در ثانیه است؟)
- ۹- سندی گردش چرخ ۳ رادیان در ثانیه است - در یک ساعت چند دور خواهد زد؟
- ۱۰- دوازدهای نیمه ای نفت را یک میل تر است دوازدهای پرتو نفت چه قدر است؟
- ۱۱- حساب کنید مسافتی را که یک نقطه ای خط استوایی پماید در مدت یک زمین یک رادیان میگردد - در همین مدت یک نقطه ای که در عرض ۴۵ قرار دارد چه مسافتی خواهد پیمود؟
- ۱۲- دایره ایست به پرتو ۵ متر چه قدر است اندازه کمانی از این دایره (بحسب نیمه) که دوازدهای آن ۶ متر می باشد؟
- ۱۳- سندی گردش چرخ هفت دور در ثانیه است در چه مدت ۶ رادیان میگرد؟
- ۱۴- تری باتندی ۵۰ کیلومتر در ساعت روی کمانی از دایره که پرتو آن ۳ کیلومتر است حرکت دارد - در مدت ۲۵ ثانیه چند زین میگرد؟

## ۲- پروازش های مثلثاتی گوشه های تند

۸- در روی یکی از پهلوی های گوشه تند  $A$  نقطه ای  $C$  برگزید با آنجا  $CB$  برابر  $AC$  ستون (عمود) میکنیم تا پهلوی دیگر گوشه را در  $B$  تلاقی کند -



بدین ترتیب سه بر راست گوشه  $ACB$  بدست میاید (شکل ۲)

بطوریکه در مقدمه کتاب دیدیم نسبت های

$$\frac{BC}{AC} \text{ و } \frac{AC}{AB} \text{ و } \frac{BC}{AB}$$

این سه گوشه و یا بستگی بجای نقطه  $C$  روی

پهلوی  $AC$  ندارند

این نسبت ها که شایه گوشه  $A$  بستگی دارند هر یک دارای نامی شایه:

عدد  $\frac{BC}{AB}$  را سینوس<sup>(۱)</sup> گوشه  $A$  مینویسیم و آنرا چنین نمایش میدیم:  $\sin A$

عدد  $\frac{AC}{AB}$  را کسینوس<sup>(۲)</sup> گوشه  $A$  مینویسیم و آنرا چنین نمایش میدیم:  $\cos A$

عدد  $\frac{BC}{AC}$  را تانژانت<sup>(۳)</sup> گوشه  $A$  مینویسیم و آنرا چنین نمایش میدیم:  $\tan A$

عدد  $\frac{AC}{BC}$  را کاتانژانت<sup>(۴)</sup> گوشه  $A$  مینویسیم و آنرا چنین نمایش میدیم:  $\cot A$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

(۱) sinus (۲) Cosinus (۳) tangente (۴) Cotangente

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC}$$

چنانکه دیده میشود:

الف - تاثرات یک گوشه تند برابر هر سینوس آن گوشه است  
به سینوس متمم آن:

$$(۵) \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

و همچنین تاثرات متمم یک گوشه بهر سینوس متمم آنست بر سینوس آن:

$$(۶) \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

و می بینیم تاثرات متمم یک گوشه تند وارونه تاثرات آن گوشه است

$$(۷) \quad \operatorname{tg} A \times \cot A = 1$$

ب - چون سینوس و سینوس متمم هر که ام برابر نسبت یکی از اضلاع قائمه  
گوشه راست است به وتر پس بیچگاه اندازه آن ضلع از یک بزرگتر و کمتر نخواهد

بود

تقریباتی بالا را پیشین نیز میتوان بیان کرد و

در هر سه پر راست گوشه

سینوس یکی از گوشه های تند برابر نسبت درازای پهلوی روبروی آن گوشه است  
به درازای وتر:

$$\sin A = \frac{\text{درازای پهلوی روبروی گوشه}}{\text{درازای وتر}} = \frac{(BC) A}{(AB)}$$

سینوس متمم یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت درازای پهلوی مجاور  
آن گوشه به درازای وتر:

$$\cos A = \frac{\text{درازای پهلوی مجاور گوشه}}{\text{درازای وتر}} = \frac{(AC) A}{(AB)}$$

تانژانت یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت پهلوی روبروی آن گوشه  
به پهلوی مجاور آن:

$$\tan A = \frac{\text{درازای پهلوی روبروی}}{\text{درازای پهلوی مجاور}} = \frac{(BC) A}{(AC) A}$$

تانژانت متمم یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت پهلوی مجاور گوشه به پهلوی  
روبروی آن:

$$\cot A = \frac{\text{درازای پهلوی مجاور}}{\text{درازای پهلوی روبروی}} = \frac{(AC) A}{(BC) A}$$

$\sin A$  و  $\cos A$  و  $\tan A$  و  $\cot A$  را پر دازش های (تابع های)  
مثلثاتی گوشه  $A$  می نامیم.

از همین راه میتوان پر دازش های مثلثاتی گوشه  $B$  را (شکل ۲) پست  
آورد:

- ۲۱ -

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

$$tg B = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC}$$

از سنجیدن پروازشهای مثلثاتی  $A$  با پروازشهای مثلثاتی  $B$  می بینیم:

$$\sin A = \cos B$$

$$\cos A = \sin B$$

$$tg A = \cot B$$

$$\cot A = tg B$$

یعنی اگر  $A$  را با  $B$  نیندازد گرفته باشیم خواهیم داشت:

$$(A) \quad \begin{cases} \sin A = \cos (90^\circ - A) \\ \cos A = \sin (90^\circ - A) \\ tg A = \cot (90^\circ - A) \\ \cot A = tg (90^\circ - A) \end{cases}$$

نام پروازشهای مثلثاتی هم چنین برابر چهارشان می آید و سینوس  $A$

یعنی سینوس  $90^\circ - A$  و ...



خاصه اینکه هرگاه دو گوشه متمم یکدیگر باشند سینوس یکی از آنها برابر  
سینوس متمم دیگر است و تانژانت یکی از آنها برابر تانژانت  
متمم دیگر میباشد

مثلاً  $\sin ۶۰^\circ = \cos ۳۰^\circ$  و  $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ$  و  $\cot ۳۷^\circ = \tan ۵۳^\circ$  و ....

### وزرش

تانژانت و سینوس برخی از گوشه مادر جدول زیر نوشته شده :

گوشه	$۱۰^\circ$	$۲۰^\circ$	$۳۰^\circ$	$۴۰^\circ$	$۵۰^\circ$	$۶۰^\circ$
تانژانت	۰.۱۷۶	۰.۳۶۴	۰.۵۷۷	۰.۸۳۹	۱.۱۹	۱.۷۳
سینوس	۰.۱۷۴	۰.۳۴۲	۰.۵۰۰	۰.۶۴۳	۰.۷۶۶	۰.۸۶۶

۱- بکتاب این جدول پیداکنید و از برای پیروی گیره برائی است گوشه  $ABC$  را

( $C$  گوشه راست) که دو جبهه آن عبارتند از

(الف)  $B = ۶۰^\circ$   $a = ۱۳$  ( $b = ۴۰^\circ$   $B = ۲۰^\circ$  متغیر)  $c =$

(ب)  $A = ۳۰^\circ$   $a = ۱۲$  ( $A = ۵۰^\circ$   $B = ۲۷^\circ$   $c =$

(ج)  $A = ۲۰^\circ$   $a = ۳۶$  ( $m = ۱۰^\circ$   $B = ۵۱^\circ$   $c =$

۲- از روی همین جدول  $a$  و  $b$  برائی (ب) (الف) (ج) (د) را

محاسبه کنید.

۳- برابر بردارانش های زیر را به حسب بردارانش متمم بنویسید مثلاً بنویسید

$$\sin ۲۷^\circ = \cos ۶۳^\circ$$

$$\sin ۵۳^\circ = ?$$

$$\sin ۲۷^\circ = ?$$

$$\cot ۲۷^\circ ۳۵' = ? \quad \tan ۲۲^\circ ۲۲' = ?$$

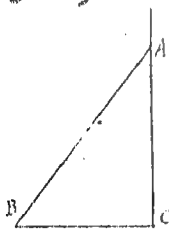
$$\tan (۹۰^\circ - ۱۵^\circ) = ? \quad \cos ۲۲^\circ ۴۲' = ?$$

$$\cos [۹۰^\circ - (۵^\circ + ۵^\circ)] = ? \quad \sin (۹۰^\circ - ۷۵^\circ) = ?$$

$$\tan (۹۰^\circ - \alpha + \beta) = ?$$

۹- تغییرات بردارانش های مثلثاتی یک گوشه تند - تغییرات سینوس

در سه بر راست گوشه  $ABC$  (که در آن  $C$  گوشه راست است) (مثلاً  $۹۰^\circ$ ) اگر نقطه ای



شکل ۴

$A$  و  $C$  پایا باشند جای  $A$  روی  $C$  تغییر کند

می پسیم اگر نقطه  $A$  خیلی نزدیک به  $C$  باشد گوشه

$A$  خیلی نزدیک به  $۹۰^\circ$  می باشد و هر چه نقطه  $A$

از نقطه  $C$  دور تر شود گوشه  $A$  از  $۹۰^\circ$  کوچک تر شد و کم کم به صفر نزدیک می شود.

از روی شکل می پسیم که اگر  $\hat{A}$  بزرگ شود  $\sin A$  نیز بزرگ می شود زیرا  $\sin A$

برابر  $\frac{CB}{AB}$  است که در آن  $CB$  پایا و  $AB$  در سویی ارون  $\hat{A}$  تغییر می کند -

و متیکه  $\hat{A}$  نزدیک به  $۹۰^\circ$  باشد سینوس آن نزدیک به یک است و موقعی که

$\hat{A}$  نزدیک بصفر باشد سینوس آن نیز نزدیک بصفر است:

$\hat{A}$	$0^\circ \longrightarrow 90^\circ$
$\sin A$	$0 \longrightarrow 1$

تغییرات سینوس متمم - در همان شکل پیش که باز  $BC$  را پایا میگیریم وقتی که جای  $A$  تغییر میکند گوشه  $B$  نیز تغییر میکند - وقتی  $A$  در  $C$  است گوشه  $B$  برابر صفر است و وقتی که  $A$  از  $C$  دور میشود گوشه  $B$  بزرگ میشود و در وقتی که  $A$  بی اندازه از  $C$  دور شود  $B$  به  $90^\circ$  میرسد.

از روی تساوی  $\cos B = \frac{BC}{AB}$  دیده میشود که سینوس متمم یک است وقتی که گوشه صفر باشد و چون گوشه از صفر ترقی کند تا به  $90^\circ$  برسد سینوس متمم از ۱ منزل میکند تا بصفر برسد:

$\hat{B}$	$0^\circ \longrightarrow 90^\circ$
$\cos B$	$1 \longrightarrow 0$

تغییرات تانژانت - در همان شکل پیش داریم  $\tan B = \frac{AC}{BC}$  وی پسندیم وقتی که گوشه از صفر ترقی کند تا به  $90^\circ$  برسد تانژانت آن از صفر ترقی

$\hat{B}$	$0^\circ \longrightarrow 90^\circ$
$\tan B$	$0 \longrightarrow \infty$

کرده‌ای اندازه بزرگ می‌گردد.  
تغییرات تاثرانت منتهی - چون تاثرانت منتهی وارون تاثرانت است تغییراتش وارونه تغییرات تاثرانت می‌باشد [و یا اینکه می‌نویسیم  $(\cot B = \operatorname{tg}(90^\circ - B))$ ]

$\hat{B}$	$0^\circ$ 
$\cot B$	$\infty$ 

بترصه - می‌توانستیم به‌طور تغییرات  $\cos B$  را از روی تغییرات  $\sin(90^\circ - B)$  بدست آوریم.

## وزرش

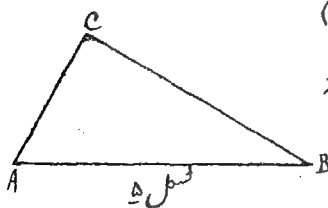
کدام یک از نابرابری‌های زیر درست است؟ کدام نادرست؟

$$\sin 41^\circ > \cos 41^\circ \quad \sin 5^\circ > \sin 3^\circ$$

$$\cos 50^\circ > \cos 2^\circ \quad \operatorname{tg} 50^\circ < \operatorname{tg} 3^\circ$$

$$\cot 5^\circ < \cot 3^\circ \quad \sin 35^\circ > \cos 35^\circ$$

۱- پردازشهای مثلثاتی گوشه ۳ و ۶ - فرض کنیم در سه برابر است



گوشه  $ACB$  که در آن گوشه  $C$  راست است

گوشه  $B$  برابر ۳ باشد (شکل ۵) بنابراین گوشه

$A$  برابر ۶ خواهد بود.

نخت پروازشای مثلثاتی گوشه : ۳ را حساب می کنیم برای معین کردن

پروازشای مثلثاتی گوشه B باید نسبت های  $\frac{AC}{AB}$  و  $\frac{BC}{AB}$  و  $\frac{AC}{BC}$  را حساب کنیم. برای این کار دو قضیه هندسی زیر را یادآوری میکنیم:

نخت بهرگاه دو یک سه بر راست گوشه یکی از گوشه های تند برابر: ۳ باشد

در ازای پهلوی روبروی آن گوشه نیم قطر خواهد بود (چرا؟)

دوم - در هر سه بر راست گوشه توان دوم وتر برابر است با مجموع توانهای

دوم دو پهلوی گوشه راست

با قضیه نخست

$$AC = \frac{1}{2} AB$$

و از آنجا بنا بر قضیه دوم  $\overline{BC}^2 = \frac{3}{4} \overline{AB}^2$  پس

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

حال میتوان پروازشای مثلثاتی گوشه B را حساب کرد :

$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cot} 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$$

دوم - پردازشهای مثلثاتی گوشه ۶۰ - چون ۶۰ ششم ۳۰ است پس خواهیم داشت:

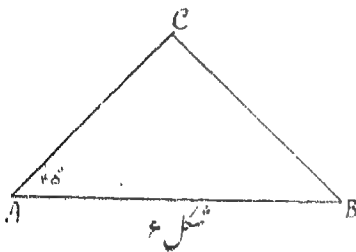
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۱ - پردازشهای مثلثاتی گوشه ۴۵ - اگر دایره بر راست گوشه ACB



(شکل ۶) گوشه A برابر ۴۵ باشد گوشه  
تند دیگر نیز ۴۵ خواهد بود و بنابراین  
در سه بر ABC دو پهلوی AC و  
CB برابر یکدیگرند

$$AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

پس

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{CB}{AC} = 1$$

خلاصه

$$(۹) \quad \begin{cases} \sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{1}{۲} \\ \cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \operatorname{tg} ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot ۳۰^\circ = \operatorname{tg} ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$(۱۰) \quad \begin{cases} \sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \operatorname{tg} ۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ = ۱ \end{cases}$$

پس با نظر گرفتن تغییرات پردازشهای مثلثاتی (شماره ۹) جدول زیر را خواهیم داشت:

A	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
$\sin A$	۰	$\frac{1}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos A$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{1}{۲}$	۰
$\operatorname{tg} A$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$\infty$
$\cot A$	$\infty$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

۱۲- تبصره - چنانکه خواهیم دید پردازشهای ۲۳، ۵۲، ۵۴ آخرتساب

از روی پردازشهای مثلثاتی گوشه های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ میتوان پردازشهای  
مثلثاتی برخی از گوشه ها مانند ۱۵ و ۷۵ و دیگر را معین نمود ولی از اینگونه شده  
نمی توان پردازشهای مثلثاتی هر گوشه ای بطور درست معین کرد - مشاهده

تقریبی بردارشن های مثلثاتی گوشه های از ۰ تا ۹۰ را حساب کرده و در جدولی ضبط کرده اند - در آخر کتاب یکی از این جدولها دیده میشود که در آن بردارشن های مثلثاتی گوشه های (دو دقیقه بدو دقیقه) با یک ده نهم تقریب نوشته شده است.

۱۳- بستگی میان سینوس و سینوس متمم یک گوشه - در سه برابر گوشه  $ACB$  (گوشه راست) داریم:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{CA}{AB}\right)^2 = 1 \quad \text{و یا}$$

$$(\cos B)^2 + (\sin B)^2 = 1 \quad \text{یعنی}$$

یعنی مجموع توانهای دوم سینوس یک گوشه و سینوس متمم آن گوشه

برابر یک است. معمولاً توان دوم  $\sin B$  و  $\cos B$  را به ترتیب

چنین نویسند:  $\cos^2 B$  و  $\sin^2 B$

(۱)

$$\boxed{\cos^2 B + \sin^2 B = 1}$$

پس

از اینجا دیده میشود که سینوس و سینوس متمم یک گوشه تند تند یکدیگر را می یابند

از یک بزرگتر باشد (۱ ب)

و برش



- ۳۰ -

۱- از روی بستنیهای (۵) (۶) (۷) و (۱۱)

الف- عبارتهای زیر را شایع  $\sin \alpha$  بنویسید:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} &= \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha - \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha}) &= \sin^3 \alpha \times \frac{\sin^2 \alpha - 2}{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} & \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha & \\ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha & \end{aligned}$$

ب- عبارتهای زیر را شایع  $\operatorname{tg} x$  بنویسید:

$$\begin{aligned} \cot x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} & \quad ; \quad \frac{1}{\cos^2 x} \\ (1 + \cos x)(1 - \cos x) + \operatorname{tg} x (\cot x - 1) & \\ \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cot x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x & \\ (1 - \sin x \cdot \cos x) : (1 + \sin x \cdot \cos x) - \cot x \sin x & \end{aligned}$$

۲- عبارتهای زیر را شایع  $\cos b$  بنویسید:

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 b & \quad \frac{\sin^2 b}{\cos b} + \frac{\operatorname{tg} b}{\cot b} \\ \operatorname{tg}^2 b + \cot^2 b - \sin^2 b - \cos^2 b & \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} + \frac{\cot x}{\operatorname{tg} x} = (\cot^2 x - 1) \sin^2 x & \end{aligned}$$

- ۲۱ -

$$\sin t \cos t \operatorname{tg} t \cot t$$

۲- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ \times \cot 30^\circ : (\sin 45^\circ : \cos 30^\circ)$$

۳- نابرابریهای زیر را روشن سازید (اگر گویا نیستند)

$$\sin a + \cos a \geq 1$$

$$\sin a + \cos a \leq \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} a + \cot a \geq 2$$

$$\sin a \cos a \leq \frac{1}{2}$$

۴- بگفت جدول پردهاشش‌ای مثلثاتی درستی برابرهای زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ - \cos 10^\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 11^\circ + \cos 49^\circ = \cos 30^\circ$$

۵- آیا برابرهای زیر درست است؟

$$\sin 9^\circ + \sin 3^\circ = \sin (6^\circ + 3^\circ)$$

$$\operatorname{tg} 6^\circ + \operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{tg} (6^\circ + 3^\circ)$$

$$2 \cos 35^\circ = \cos 9^\circ$$

$$\cot 30^\circ + \cot 45^\circ = \cot 75^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ$$

۶- از روی بستگیهای (۵) و (۶) و (۷) و (۱۱) دستی برابریهای زیر را برآورد:

نابند:

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} - \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{4 \operatorname{tg} a}{\cos a}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

۱۳- مسئله - با داشتن یکی از پرده‌های مثلثاتی یک گوشه‌شد پرده‌ها دیگر آن گوشه را بدست آورید.

مثلاً سینوس گوشه‌تندی که آن را  $\hat{B}$  بنامیم  $\frac{4}{5}$  است میخواسیم

$\cos B$  و  $\operatorname{tg} B$  و  $\cot B$  را حساب کنیم

الف - کشایش جبری - برای کشیدن مسئله از رابطه‌های (۵)

و (۶) و (۷) و (۱۱) را که میان پرده‌های مثلثاتی یک گوشه موجود است

بکار میبریم.  
از زوی بستگی (۱۱)  $\cos^2 B$  بدست میآید

$$\cos^2 B = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

پس  $\cos B = \pm \frac{4}{5}$   
ولی بموجب تعریف پر دازشهای مثلثاتی یک گوشه تند نیمه مشتند زیرا  
هر یک از آنها برابر نسبت دو دازای هندسی می باشد - بنابراین

$$\cos B = \frac{4}{5}$$

حال بنا بر بستگی (۵)

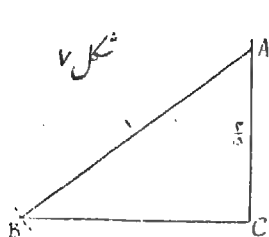
$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3}{4}$$

و بنا بر بستگی (۷)

$$\cot B = \frac{4}{3}$$

اگر بجای سینوس بی دیگر از پر دازشهای مثلثاتی داده میشد شش  
مانند بالا میبود.

ب- کشایش هندسی - روی بی از پهلویهای گوشه راست  
نقطه A را بفاصله  $CA = \frac{4}{5}$  یکم درازا گرفته بر مرکز A مکان دایره ای  
می کشیم که درازای پر توان برابر یکم درازا باشد تا پهلوی دیگر گوشه را



شکل ۷

در  $B$  تلاقی کنند (شکل ۷) - سینوس گوشه

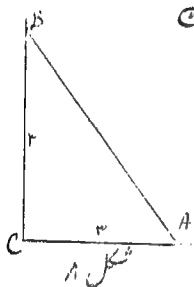
$ABC$  عدد داده شده  $\frac{3}{5}$  است و پیراشنای

مثلاً این گوشه پانچ مسند میباشند - برای بدست آوردن آنها کافیت درازای  $BC$  را اندازه بگیریم - در این شکل  $BC$  برابر  $\frac{3}{5}$  یک درازاست

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} \quad \text{پس}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot B = \frac{3}{4}$$



شکل ۸

اگر بجای سینوس  $B$  سینوس متمم  $B$  داده میشد

راه گشایش مانند بالا میبود - اگر  $\tan B$  داده شود مثلاً

$$\tan B = \frac{4}{3}$$

مانند  $\tan B$  درازای  $AC$  برابر با  $4$  و  $3$  یک درازا بگیریم تا به  $ACB$  پیدا شود (شکل ۸)

$$CB = 4 \quad CA = 3$$

و از روی شکل درازای  $AB$  را اندازه میگیریم میشود  $AB = 5$

$$\sin B = \frac{CA}{AB} = \frac{3}{5} \quad \text{پس}$$

$$\cos B = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$$

و رزش

۱- پردازشهای مثلثاتی دیگر گوشه شده  $x$  را بدست آورید:

$$\sin x = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\cot x = 3 \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{9}{4} \quad (3)$$

$$\cos x = \frac{4\sqrt{3}}{5} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{24}{7} \quad (5)$$

$$\cot x = \frac{4}{3} \quad (6)$$

$$\cos x = \frac{1}{5} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \quad (8)$$

$$\cos x = \frac{12}{13} \quad (9)$$

$$\sin x = \frac{5}{13} \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad (11)$$

$$\sin x = \frac{3}{5} \quad (12)$$

۱۳- اگر  $\sin x = 3$  و  $\operatorname{tg} y = 4$  باشد آیا میتوان پردازشهای

دیگر  $x$  و  $y$  را حساب کرد؟ چرا؟

۱۴- آیا گوشه‌ای یافت میشود که سینوس آن  $\frac{7}{5}$  و سینوس متمم آن  $\frac{7}{13}$  باشد؟

۱۵-  $\sin x = \frac{4}{5}$  بدست آورید پردازشهای مثلثاتی  $x - 90^\circ$  را

۱۵- پیدا کردن یک گوشه تند باد داشتن یکی از پردازشهای

مثلثاتی آن

الف- راوبند می- دیدیم (۱۴ ب) که اگر مثلاً  $\sin B$

دادده شده باشد میتوان سه گوشه  $ABC$  کشید که در آن سینوس گوشه  $B$  عدد دادده شده است پس کافی است گوشه  $B$  را بافتاله اندازه بگیریم. در مثل  $\triangle$  که سینوس  $B$  برابر  $\frac{3}{5}$  است می بینیم  $B$  تقریباً  $37^\circ$  است اگر بجای سینوس سینوس متمم و یا تاثرانت دادده شود راه گشایش مسئله این است.

### ورزش

گوشه  $x$  را در هر یک از حالت های زیر کشیده پردازش های دیگر آن را بیابید.

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad (2) \quad \sin x = \frac{5}{9} \quad (1)$$

$$\cos x = \frac{3}{5} \quad (4) \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (6) \quad \cos x = \frac{2m}{1+m^2} \quad (5)$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \quad (8) \quad \cot x = \frac{1}{15} \quad (7)$$

$$\cot x = \frac{2a}{3} \quad (9)$$

ب. از روی جدول مثال ۱- سینوس گوشه تند  $60.41^\circ$  است

کدام است آن گوشه؟

در جدول می بینیم که عدد  $60.41^\circ$  سینوس  $37^\circ$  است:

$$\sin 37^\circ \approx 0.6041$$

مثال ۲- تاثرانت گوشه تندی ۳۵۲۸. است آن گوشه را می بین کنید  
این عدد در جدول دستون تاثرانت دیده نمی شود ولی می پسیم این عدد از  
۳۵۰۸. که تاثرانت ۲۰ ۱۹ است بزرگتر از ۳۵۴۱. که تاثرانت  
۳۰ ۱۹ میباشد کوچکتر است. پس چون برگاه گوشه تند بزرگ شود  
تاثرانت آن نیز بزرگ میشود گوشه ناشناس از ۲۰ ۱۹ بزرگتر و از  
۳۰ ۱۹ کوچکتر است.

برای حساب کردن آن میتوان تقریباً فرض نمود که از ۲۰ ۱۹ تا  
۳۰ ۱۹ تغییرات گوشه تناسب است با تغییرات تاثرانت آن. و به صورت  
چون تفاضل میان ۲۰ ۱۹ و عدد داده شده ۰۰۲۰ میباشد  
و تفاضل میان ۲۰ ۱۹ و ۳۰ ۱۹ ۰۰۳۳ است گوئیم  
برگاه بگوشه ۱۰ افزوده شود به تاثرانت ۰۰۳۳. افزوده میشود  
پس چه اندازه بگوشه باید افزوده شود تا به تاثرانت ۰۰۲۰. افزوده شود  
جواب  $\frac{۱۰ \times ۲۰}{۳۳}$  دقیقه است یعنی تقسیم ۲۰ دقیقه. بنا برین گوشه  
ناشناس برابر ۲۶ ۱۹ است:

$$۳۵۲۸ = ۲۶ ۱۹$$

شرح بالا را بطور خلاصه چنین نویسند:



$$D = 22 \left\{ \begin{array}{cc} 19 & 20 \\ 2501 & x \\ 2521 & 19 \end{array} \right\} 10$$

$$x = 19 \cdot 20 + \left( \frac{10 \times 20}{22} \right)$$

مثال ۳- سینوس متمم یک گوشه تند ۹۰.۱۷ است که ام است آن

گوشه؟

این عدد نیز جدول دستون سینوس متمم ما دیده می شود ولی می پسینیم از عدد ۹۰.۱۳ که  $\cos 25^\circ 40'$  است بزرگتر و از عدد ۹۰.۲۶ که

$\cos 25^\circ 30'$  است کوچکتر است

ولی میدانیم هرگاه گوشه تند بزرگ شود سینوس متمم آن کوچک می شود و بعکس پس گوشه ناشناس از  $25^\circ 40'$  کوچکتر و از  $25^\circ 30'$  بزرگتر است.

باز فرض میکنیم از  $25^\circ 30'$  تا  $25^\circ 40'$  تغییرات سینوس متمم با تغییر گوشه تناسب باشد بنابراین چون تفاضل میان  $\cos 25^\circ 40'$  و  $\cos 25^\circ 30'$  ۰.۰۱۳ و تفاضل میان  $\cos 25^\circ 40'$  و عدد داده شده ۰.۰۰۹ است

میگوئیم:

هرگاه ۱۰ گوشه افزوده شود از سینوس متمم آن ۰.۰۱۳ کم می شود پس حاصل آن

به گوشه افشوده شود تا از سینوس تمام آن ۹۰۰۰۰ ر. کم شود ؟  
 جواب  $\frac{10 \times 5}{13}$  تقریباً ۷ دقیقه است بنابراین گوشه ناشناس  
 $۲۵^{\circ} ۳۰' + ۷$  است :

$$\cos ۲۵^{\circ} ۳۷' = ۷۹.۰۱۷$$

در این جانیز خلاصه عمل را چنین بنویسیم :

$$D - ۱۳ \left\{ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{cc} ۹.۰۲۶ & ۲۵ \quad ۳۰ \\ ۹.۰۱۷ & x \\ ۹.۰۱۳ & ۲۵ \quad ۳۰ \end{array} \right) \end{array} \right\} ۱۰$$

$$x = ۲۵^{\circ} ۳۰' + \left( \frac{۱۰ \times ۹}{۱۳} \right)$$

وزرش

۱- گوشه های x از وزرش بالا (۱۵ الف) را از روی جدول پیدا کنید

دیگر x را از روی جدول بدست آورده و نتیجه را با هم بنویسید.

۲- از روی جدول دستی عددهای زیر را بررسی نمایید

$$\sin ۴۱^{\circ} ۴۰' = ۶۶۴۸ ; \cos ۴۸^{\circ} ۵' = ۷۷۸۷۱$$

$$\sin ۷۶۷۷۸ = ۷۶۲۷۱ , \quad \operatorname{tg} ۵۴^{\circ} ۴۵' = ۱۳۶۳۹$$

$$\cos ۴۹^{\circ} ۱۷' = ۷۶۴۲۵ ; \quad \cot ۶۴^{\circ} ۱۰' = ۷۴۸۴۱$$

## ۳- گشایش سه برهائی است گوشه

۱- چنانکه در مقدمه گفت شد موضوع علم مثلثات پیدا کردن جزوهای ناشناس سه گوشه ها است از روی جزوهای شناخته آنها بوسیله دستورهای مثلثاتی.

اینک با آنچه آموختیم میتوانیم به گشایش سه برهائی راست گوشه بپردازیم: از راه هندسی میدانیم که هرگاه یک چرخه و یک جزو دیگر (جز گوشه) از یک سه برهائی است گوشه را بشناسیم جزوهای دیگر را میتوان بدست آورد برای بدست آوردن جزوهای ناشناس دستورهای دیگر که بکار میبریم اینها:

(ج گوشه راست)

$$(۱۲) \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{قضیه فیثاغورس})$$

$$(۱۳) \quad A + B = 90^\circ$$

$$(۱۴) \quad \sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$(۱۵) \quad \cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$(۱۶) \quad \tan A = \frac{a}{b} = \cot B$$

دستورهای (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) در شماره ۸ ضمن تعریف پردازشهای

مثلاً فی گوشه تند بدست آمده و معنی آنهارا دوباره بعبارت دیگر یادآوری میکنیم:

در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوی های گوشه راست برابر است با حاصل ضرب درازای وتر در سینوس متمم گوشه مجاور بدان پهلو:

$$b = c \cos A \quad a = c \cos B$$
 در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوی های گوشه راست برابر است با حاصل ضرب درازای وتر در سینوس گوشه روبروی آن پهلو:

$$b = c \sin B \quad a = c \sin A$$
 در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوی های گوشه راست برابر است با حاصل ضرب تانژانت گوشه روبروی آن پهلو در درازای پهلوئی دیگر

$$b = a \cdot \operatorname{tg} B \quad a = b \cdot \operatorname{tg} A$$

پرش های ساده

اگر در سه بر راست  $ABC$  ( $\hat{C}$  گوشه راست)

چند است؟  $a$   $\sin A = \frac{1}{3}$  (۱)  $c = ۳$  متر باشد

بیشتر  $a$   $\sin A = \frac{2}{5}$  و  $c = 24$  متر باشد (۲)

"  $a$  "  $c = 16$  و  $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$  (۳)

"  $c$  "  $c = 15$  و  $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$  (۴)

"  $a$  "  $c = 15$  و " " (۵)

"  $c$  "  $a = 18$  و  $\sin A = \frac{3}{4}$  (۶)

"  $c$  و  $a$  "  $c = 21$  و  $\cos A = \frac{2}{3}$  (۷)

" "  $c = 20$  و  $\operatorname{tg} A = 0.25$  (۸)

"  $a$  و  $c$  "  $c = 50$  و  $\frac{1}{\sin A} = 5$  (۹)

مثال نخست - از سه بر راست گوشه  $ABC$  وتر  $AB$  و گوشه  $\hat{B}$  را

داریم:  $AB = c = 15.7$  متر.

$\hat{B} = 35^\circ 4'$ .

نامها عبارتند از  $\hat{A}$  و پهلوهای  $AC = b$  و  $BC = a$

گشایش - بموجب دستور (۱۳)

(۱۵) و بموجب دستور (۱۴)  $A = 90^\circ - 35^\circ 4' = 54^\circ 2'$

$a = c \cos B = 15.7 \times \cos 35^\circ 4'$

$b = c \sin B = 15.7 \times \sin 35^\circ 4'$

- ۴۳ -

$\sin B$  و  $\cos B$  از روی جدول بدست میآید:

$$\sin 35^\circ 40' = 0.5831$$

$$\cos 35^\circ 40' = 0.8124$$

$$a = 15.7 \times 0.8124 = 12.755 \quad \text{پس}$$

$$c = 15.7 \times 0.5831 = 9.154$$

اگر هینت سه برابر رسم بخوانیم با داشتن  $a$  و  $c$  میتوان آنرا حساب کرد

$$B = \frac{a \cdot c}{r} = \frac{c^2}{r} \sin B \cdot \cos B = \frac{12.755 \times 9.154}{2} = 58.38 \quad \text{مربع}$$

میتوان درستی نتجه را از روی دستور (۱۲) بررسی نمود

مثال دوم - از سه برابر است گوشه  $ABC$  پهلوی  $AC$  و یکی از گوشه های  
تند را داریم:

$$AC = c = 23.65$$

$$\hat{A} = 28^\circ 20'$$

دریخا وتر  $AB$  و پهلوی  $BC$  و گوشه  $\hat{B}$  ناشناخت

گشایش - بموجب دستور (۱۳)

$$B = 50^\circ - 28^\circ 40' = 21^\circ 20'$$

و بموجب دستورهای (۱۵) و (۱۶) خوانیم داشت:

$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{23,65}{\cos 21^\circ 30'}$$

$$a = b \operatorname{tg} A = 23,65 \times \operatorname{tg} 21^\circ 30'$$

$\cos A$  و  $\operatorname{tg} A$  را از روی جدول بدست میاوریم:

$$\cos 21^\circ 30' = 0,9318$$

$$\operatorname{tg} 21^\circ 30' = 0,3963$$

$$c = \frac{23,65}{0,9318} = 25,39 \quad \text{پس}$$

$$a = 23,65 \times 0,3963 = 9,37$$

پهنه سه بر هم برابر است!

$$\frac{ab}{c} = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} A = \frac{23,65 \times 9,37}{2} = 110,96$$

در این جا هم می توان درستی نتیجه را از روی دستور (۱۲) بررسی نمود و آنرا چنین بنویسیم:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

مثال سوم - از یک سه بر راست گوشه دو پهلوی گوشه راست را می شناسیم:

$$AC = b = 8 \text{ متر}$$

$$BC = a = 7 \text{ متر}$$

وتر و گوشه مانناشناس است.

گشایش - گرچه وتر از روی دستور (۱۲) بدست میآید ولی برای نیکه  
ریشه گرفتن و در کار نباشد بهتر است آنست که وتر را پس از گوشه با و از روی آنها  
بدست بیاوریم و دستور (۱۲) را برای بررسی درست بودن نتیجه بکار

بریم  
بموجب دستور (۱۶)

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{7}{8} = ۰.۸۷۵$$

چون اثر آنست  $\hat{A}$  را داریم  $\hat{A}$  را از روی جدول بدست میآوریم:

$$A = 41^{\circ} 11'$$

$$B = 90^{\circ} - A = 48^{\circ} 49' \quad \text{پس}$$

حال وتر را مثلاً از روی دستور (۱۵) حساب می‌کنیم:

$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{8}{\cos 41^{\circ} 11'}$$

و  $11^{\circ} 42'$  را از روی جدول حساب می‌کنیم:

$$\cos 41^{\circ} 11' = ۰.۷۵۲۶$$

$$c = \frac{8}{۰.۷۵۲۶} = ۱۰.۶۴۹$$

پس  
مثال چهارم - از یک سه برآست گوشه و تری یکی از ضلع‌های گوشه



راست را داریم:

$$AB = c = ۱۱ \text{ متر}$$

$$AC = b = ۷ \text{ متر}$$

ناشناس‌ها در این جا عبارتند از دو گوشه  $A$  و  $B$  و پهلوی  $a$  گشایش - بموجب دستور (۱۵)

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{۷}{۱۱} = ۰.۶۳۶۳$$

پس  $\hat{A}$  از روی جدول بدست می‌آید:

$$A = ۵۰^\circ ۲۹'$$

و بموجب دستور (۱۳)

$$B = ۹۰^\circ - A = ۳۹^\circ ۳۱'$$

و بموجب دستور (۱۶)

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A$$

و  $\operatorname{tg} A$  از روی جدول بدست می‌آید:

$$\operatorname{tg} ۵۰^\circ ۲۹' = ۱.۲۱۲۴$$

پس

$$a = ۷ \times ۱.۲۱۲۴ = ۸.۴۸۶ \text{ متر}$$

در این جا نیز میتوان  $a$  را از روی دستور  $a^2 = (c - b)(c + b)$   
 بدست آورد و به درستی نتیجه پی برد.  
 ورزش

جزرهای ناشناس پنجه سه برای راست گوشه زیر را بشناسانید:

$$\left. \begin{array}{l} b = 1,51 \\ a = 2976 \end{array} \right| \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} A = 25 \quad 27 \\ a = 20151 \end{array} \right| \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 59 \quad 47 \\ c = 1749 \end{array} \right| \quad (4) \quad \left. \begin{array}{l} a = 17,512 \\ c = 21,285 \end{array} \right| \quad (3)$$

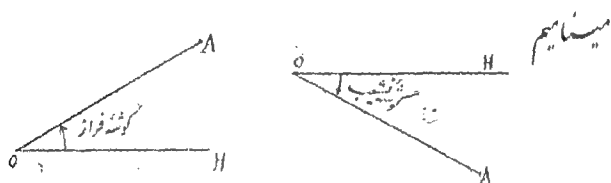
$$\left. \begin{array}{l} a = 7,223 \\ b = 1,912 \end{array} \right| \quad (6) \quad \left. \begin{array}{l} B = 28 \quad 33 \\ b = 29325 \end{array} \right| \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 23 \quad 13 \\ c = 2001028 \end{array} \right| \quad (8) \quad \left. \begin{array}{l} b = 2711 \\ c = 2976 \end{array} \right| \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 53 \quad 17 \\ c = 117,6 \end{array} \right| \quad (10) \quad \left. \begin{array}{l} B = 29 \quad 17 \\ a = 20595 \end{array} \right| \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 61 \quad 18 \\ a = 20101 \end{array} \right| \quad (12) \quad \left. \begin{array}{l} A = 49 \quad 26 \\ a = 1510 \end{array} \right| \quad (11)$$

گوشه نشیب و گوشه فراز - فرض کنیم چشم در نقطه  $O$  باشد و نقطه ای باشد  $A$  نگاه  
کنیم - نقطه  $OA$  با من افقی  $H$  که از  $O$  میگذرد گوشه ای می سازد - بنا بر آنکه  $A$   
بالای من  $H$  یا پایین آن باشد گوشه تند  $HOA$  را گوشه فراز یا گوشه نشیب  $A$  از  $O$

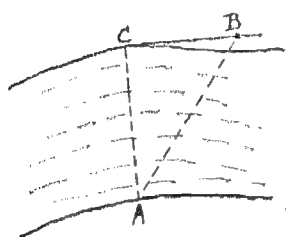


۱۲- بندی مساره ای ۳۵ متر و گوشه نشیب از آن از  $O$  که روی زمین است یعنی  
گوشه نشیب از مساره ۳۰ می باشد - دوری  $O$  از پای منار چقدر است؟  
۱۳- چشم شخصی که ۶۰ متر و در درختی ایستاده گوشه فراز آن درخت ۲۰ است  
بندی درخت را حساب کنید - در صورتیکه بایم چشم آن شخص ۶۰ متر بالاتر از زمین باشد.  
۱۴- سایه درختی برابر با بندی آن درخت است بندی خورشید را گوشه فراز خورشید  
در آن ساعت چیست؟

۱۵- حوض دایره شکلی است برآب در نزدیکی برجی به بندی ۳۵ متر - برای  
شناختن درازای میان برج و حوض گوشه نشیب و مسریان برای حوض اگر بایج در یک  
راستا است از مسری برج اندازه گرفتیم ۴۵ و ۳۰ شده درازای میان برج  
ساب کنید.

کشایش همین مسئله وقتی که دو گوشه بترتیب ۴۳ و ۲۸ باشد.

۱۷- شخصی برای پیدا کردن پنهانی یک رودخانه یعنی برای پیدا کردن اندازه



AC در روی عمودیکه از C بر CA کشیده

۲۵ متر از C دور شده (CB=۲۵)

دگوشه CBA را اندازه گرفته است  $\widehat{CBA} = 60^\circ$

حساب کنید AC را.

۱۸- باد دگوشه یاب که در دو نقطه A و B می باشد گوشه فراز هوا پیمائی را از

میکیریم (در قسمتی که هوا پیمایه نامن شاغولی که از AB میگذرد میرسد) بترتیب ۶۰

و ۴۵ می باشد حساب کنید بلندی هوا پیمای را بفرض اینکه A و B هر دو روی

یک خط افقی بوده ۱۵۰۰ متر از هم دور باشند.

۱۹- در کنار رودخانه ای پنهانی ۵۰ متر برجی است - و میدانم سینوس

گوشه فراز برج از آنطرف رودخانه که درست دوبروی برج است  $\frac{2}{3}$  می باشد - بلندی

برج چند متر است؟

۲۰- بچه اندازه از پای برجی که بلندی آن ۲۰ متر است دور باید شد تا گوشه فراز

برج  $30^\circ$  دیده شود؟

۲۱- شگلی پای برجی در یک نامن افقی است اگر گوشه نشیب سنگ از زیر برج  $30^\circ$  باشد

گوشه شیب آن از سوراخی از برج که درست بیک فاصله از پائین بالای برج است چقدر بود؟

۲۲- بندی سه گوشه مساوی الساقینی ۱۲ متر و بزرگ از دو گوشه برابر آن ۴۱ می باشد. پهلوی و پهنه آن را حساب کنید.

۲۳- شخصی میخواهد بندی درختی را اندازه بگیرد. برای اینکار از دو نقطه  $A$  و  $B$  که بالای درخت روی یک خط افقی می باشد گوشه فراز درخت اندازه گرفته. در  $A$  سینوس گوشه فراز درخت  $\frac{3}{5}$  و در  $B$  که ۱۵ متر از  $A$  بدینست نزدیکتر است تانژانت گوشه فراز  $\frac{4}{3}$  می باشد بندی درخت چقدر است؟

۲۴- حساب کنید پرتو دایره های عمودی و محیطی یک چرخ بر مستطیلی را که پهلویش چهار

متر است

۲۵- در یک دایره هرگاه زوای  $\frac{\pi}{4}$  پرتو باشد مرکز زوای روبروی آن زوای چقدر است؟

۲۶- برای بستن بندی یک برج گنبدانی که در بالای تپه ای ساخته شده است

در پائین تپه از دو نقطه  $A$  و  $B$  گوشه فراز بر جرمعین کردیم ترتیب ۲۲ و ۲۶

شده است -  $A$  و  $B$  روی یک خط افقی می باشد که با آن سه برج در یک نامست

و  $AB$  برابر ۳۰ متر می باشد. بندی برج از پای تپه چقدر است؟

۲۷- بندی ساختمانی ۲۰ متر است - چه اندازه دور از آن باید بود تا گوشه ۲۵

دید شود.

۲۸- از بالای برج به بلندی ۱۱۰ متر گوشه نشیب و نقطه  $A$  و  $B$  ترتیب ۴۳۱۷ و ۲۰ ۳۱ است  $A$  و  $B$  با پای برج روی یک خط افقی بوده و در یک سمت برج میباشند. فاصله  $A$  و  $B$  از هم چقدر است؟

۲۹- کوهی است به بلندی ۴۵۰۰ متر گوشه من از آن از نقطه ای  $A$  که خود ۲۰۰۰ متر بالای دریاست ۲۰ ۳۱ است دوری  $A$  از سر کوه چقدر است؟

۳۰- گوشه من از درختی در یک نقطه ۳۰ است لی اگر به تریه بخت نزدیکی شوم گوشه بلندی آن ۴۲ خواهد بود. بلندی درخت چیست؟

۳۱- راجی است به شیب ۵ درصد (یعنی دو نقطه از راه که فاصله افقی آنها صد متر است ۵ متر اختلاف بلندی دارند) پس اختلاف بلندی دو نقطه  $A$  و  $B$  از راه را بفرض اینکه  $A$  و  $B$  پنج کیلومتر از هم دور باشند.

۳۲- پروتو (شعاع) کره زمین ابرگاه از راه بگذرد به گوشه ۵۶ دیده میشود این رود دوری راه را از زمین حساب کنید. (به حسب پروتوزمین)

۳۳- هواپیمائی در بلندی ۵۰۰ متر پرواز میکند چه دایره ای از زمین خواهد دید؟ (یعنی پروتو این دایره چقدر است؟ و یا پروتو افق هواپیما چیست؟)

۳۴- هواپیما چه بلندی باید پرواز کند تا اینکه ۲۰ کیلومتر دورتر را ببیند؟

۳۵- پرتو دایره‌ای ۵۷ سانتیمتر است - پیرامون ۵ پهلوی منتظم مخاط در آن چه

میباشد؟

۳۶- پهنه پهلوی منتظم مخاط در همین دایره چیست؟

۳۷- اگر پهنه ۵ پهلوی منتظم مخاط در یک دایره ۴۳۱ سانتیمتر مربع باشد پهنه

پهلوی منتظم مخاطی چه خواهد بود؟ پرتو این دایره پرتو دایره محیط پهلوانیز حساب کنید.

۳۸- ثابت کنید که پهنه  $n$  پهلوی منتظم مخاط در دایره‌ای که پرتوش  $R$  است برابر

با  $n R^2 \sin \frac{180}{n} \cdot \cos \frac{180}{n}$  میباشد و از روی این دستور پهنه چند برای

منتظم مخاطی را که شماره پهلوانی آن ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۲ باشد

حسب  $R$  بدست آورید.

۳۹- ثابت کنید که پهنه  $n$  پهلوی منتظم محیطی  $n R^2 \operatorname{tg} \frac{180}{n}$  است

۴۰- از بالای مناری بلند ۴۲ متر گوشه نشیبی و سنگلی که بنای مناری

یک خط افقی میسبازند  $12^\circ$  و  $32^\circ$  میباشد و سنگ از هم چه اندازه دارند؟

۴۱- شش پهلوی منتظمی در دایره‌ای محیط است که پرتوش ۹ متر است درازای پهلوانی

آنرا حساب کنید.

۴۲- درازای گوشه بزرگ یک پهلوی منتظم ۷ متر است درازای پهلوانی آن چیست؟

۴۳- نه پهلوی منش طغی دایره ای محاط است به پرتو ۵ متر دایره ای هر یک از پهلوی های  
از آن حساب کنید.

۴۴- میان بردایره ای ۳۱۸۷ هست حساب کنید گوشه مرکزی رو برو به کمانی  
از آن راکه زشش ۱۰۶۹ است.

۴۵- زد کمانی به درازی ۲۰ سانتیمتر است دوری میان زده میان کمان ۶ سانتیمتر  
اندازه کمان بحسب دقیقه و زینه چیست؟

۴۶- حساب کنید زینه های کمانی راکه پرتوش ۹ متر دوری میان آن کمان از میان  
زشش ۲۵ متر باشد.

۴۷- درازی پهلوی یک ۸ متر قطره است حساب کنید پرتو دایره محاطی و  
محیطی آن را.

۴۸- پنج بر خطی است محاط در یک دایره به پرتو ۳ متر حساب کنید پرتو دایره محاطی  
از آن.

۴۹- پایه بری ربعی به پهلوی ۵ متر است گوشه میان هر یک از پهلوی های ربع ایال  
برم ۲۵ است بندی برم چند است؟

۵۰- از A که در جنوب برجی است گوشه فرا از آن ۶۰ است و از B که ۱۰۰ متره  
شمالی A است گوشه فرا از برج ۲۰ بندی برج را حساب کنید.



۵۱- از یک نقطه دو درخت  $A$  و  $B$  را پی بنهیم  $A$  که در ۱۶ متری است گوشه فرارش  
 ۳۴ ۳۴ میباشد، گوشه فرار  $B$  که در ۲۵ متری میباشد ۵۰ ۳۱ است کدام یک از دو  
 درخت بلندتر است و چقدر؟

۵۲- پرتو دایره ای ۱۳۴ سانتیمتر است حساب کنید ده کمان ۲۳ ۵۴ را  
 ۵۳- در ساختمانی که سایه درختی به بلندی ۲۵٫۳۲ متر ۱۸٫۶۵ متر میباشد خورشید چند درجه  
 بالای افق است؟ (با بلندی خورشید چه اندازه است؟)

۵۴- پهنای دروازه ای راست گوشه ای نزدیک ۵۰ و ۲۴ سانتیمتر است حساب کنید  
 گوشه ای را که پهلوی بزرگ آن با گوشه برشته طری سازد.  
 ۵۵- زاویه دایره ای دروازه ای ۱۰ متر است گوشه مرکزی روبروی آن ۱۲- دروازه ای پرتو  
 دایره را حساب کنید.

۵۶- سایه درختی در ساختمانی که گوشه فرار خورشید ۵۶ است ۱۰ متر میباشد بلندی  
 درخت را حساب کنید.

۵۷- گوشه خارجی میان دو مماس بر دایره ۵۰ است دروازه ای این دو مماس  
 (از نقطه تلاقی آنها تا نقطه مماس) پنج متر پرتو دایره را حساب کنید.

۵۸- کف ایوان خانه ای ۳ متر بالاتر از آب حوض است در آن خانه دایره ایست  
 که گوشه فرارش از نقطه  $A$  که در کف ایوان می گیریم ۳۰ و گوشه نشیب تصویرش در آب حوض



- ۵۱- از یک نقطه دو درخت  $A$  و  $B$  را می بینیم که در ۶ متری است گوشه فرازش  
 ۴۴ ۳۶ می باشد گوشه فراز  $B$  که در ۲۵ متری می باشد ۵۰ ۳۱ است که ام یک سارو  
 درخت بلند تر است و چه اندازه؟
- ۵۲- پرتو دایره ای ۸۳۳ سانتیمتر است حساب کنید زوایای ۲۳ ۵۴ را
- ۵۳- در ساعتی که سایه درختی به بلندی ۲۵٫۳۲ متر ۱۸٫۶۵ متر می باشد خورشید چندین  
 بالای افق است؟ (با بلندی خورشید چه اندازه است؟)
- ۵۴- پهنای درازای راست گوشه ای نزدیک ۵۰ و ۷۴ سانتیمتر است حساب کنید  
 گوشه ای را که پهلوی بزرگ آن با گوشه بر قطری سازد.
- ۵۵- زوایای درازای ۱۰ متر است گوشه مرکزی روبروی آن ۱۷- درازای پرتو  
 دایره را حساب کنید.
- ۵۶- سایه درختی در ساعتی که گوشه فراز خورشید ۵۶ است ۱۰ متر می باشد بلند  
 درخت را حساب کنید.
- ۵۷- گوشه خارجی میان دو مماس بر دایره ۵۵ است درازای این دو مماس  
 (از نقطه تلاقی آنها تا نقطه تماس) پنج متر- پرتو دایره را حساب کنید.
- ۵۸- کف ایوان خانه ای مستطیل از آب حوض آنت و در آن خانه بستی  
 که گوشه فرازش از نقطه  $A$  که در کف ایوان می گیریم ۳۰ و گوشه نشیب تصویرش در آب حوض



اینجا اندازه گوشه  $AOB$  است بحسب ادیان

۶۰- چقدر است پهنه قطاعی که گوشه مرکزی آن  $۳۲^\circ$  و درازای کمانش  $۱۰$  متر است؟

۶۱- در دایره ای به پرتو  $۸$  سانتیمتر دوری از مرکز  $۵$  سانتیمتر است حساب

کنید پهنه کوچکترین پاره ای را که این دایره جدا میکند.

۶۲- پرتو دایره ای  $۸۳.۴$  سانتیمتر است حساب کنید درازای کمان  $۲۳^\circ$   $۵۴'$

و درازای زین کمان را.

۶۳۰- بعرض اینکه درازای یک زین دایره استوار  $۱۱۲$  کیلومتر باشد چنان

کنید درازای یک زین را از مداری که بعرض  $۴۵^\circ$  است.

۶۴۰- بطول کلی اگر  $d$  درازای یک زین استوار  $\alpha$  عرض مداری باشد

کنید که درازای یک زین ازین مدار  $d \cdot \cos \alpha$  میباشد.

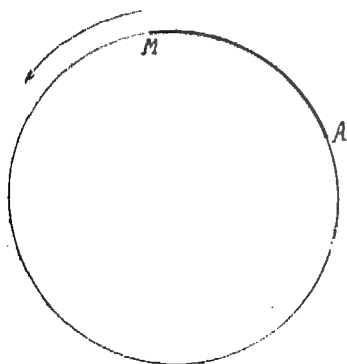
## بخش دوم

پردازشهای مثلثاتی گوشه‌ها بطور کلی

۱۷- سونشانه‌ها - انداز و جبری - روی یک خط راست

برای رخن از یک نقطه  $A$  بیک نقطه دیگر  $M$  یک راه پیش‌نیت و در این راه هم‌سوی حرکت و هم‌درازی راه معین است.

ولی در روی پیرامون یک دایره (و بطور کلی روی پیرامون هر جسم بی‌نهایتی) برای رخن از یک نقطه  $A$  بیک نقطه دیگر  $M$  می‌توان دو سوبگرد گزید یکی سویی حرکت عقرب‌های ساعت و دیگری سویی مخالف آن - و در هر یک از دو سوزاری راه را هم می‌توان بدخواه - در تحت قانون معینی تعیین داد.



شکل ۹

در مثلثات قرار بر این است

که سویی مخالف گردش عقرب‌های

ساعت را سویی مثبت بگیرند و آنرا

سویی مثبت مثلثاتی می‌نامند.

(سویی تیر در شکل ۹)

بنابرین سویی گردش عقربک های ساعت سویی منفی خواهد بود.  
 با این قرارداد اندازه جبری راه های گانه ای پیوده شده در سویی مثبت  
 مثلثاتیر مثبت (باشانه +) و اندازه جبری راههای گانه ای پیوده شده  
 در سویی منفی را منفی (باشانه -) میگیرند.  
 فرض کنیم اندازه مثبت گمان  $AM$  که در شکل ۹ درشت کشیده شده بحسب  
 یکی از یک های گمان  $a$  و اندازه پیرامون دایره بحسب همان یک  $c$  باشد.  
 برای اینکه متحرکی از  $A$  (سر گمان) به  $M$  (ته گمان) برود میتواند  
 در سویی مثبت مثلثاتی فقط گمانی برابر  $a$  به پیاید و یا اینکه در سویی منفی را به  
 به پیاید که قدر مطلق آن  $-a$  باشد.  
 ولی متحرک پیش از آنکه در  $M$  بایستد میتواند چند دور تمام در یکی از دو  
 بزند. اندازه این دوره را میتوانم بصورت  $nc$  بنویسم که  $n$  عدد درست  
 مثبتی است.

پس اندازه راههای گانه جهت مثبت پیوده میشود بصورت کلی  
 $a + nc$  نوشته میشود (..... ۲، ۱، ۰، ۱، ۲، ...  $n$ ) و قدر مطلق آنها را که  
 در سویی منفی پیوده میشود بصورت

$$c - a + nc$$

است پس اندازه جبری این را به صورت زیر است :

$$\alpha - (n+1)c \quad \text{و یا} \quad -c + \alpha - nc$$

بنابراین اگر اندازه جبری را بی راکه متحرک زوئی سپارمون ایره می یابد  
تا از سرکان  $A$  به تیه کان  $M$  برسد به  $AM$  غایش همیم - سوی حرکت هر چه باشد  
خواهیم داشت :

$$(۱۷) \quad \overline{AM} = \alpha + k \times c$$

$k$  در این دستور عدد درستی است مثبت یا منفی یا صفر:  $k = 0, \pm 1, \pm 2$

و  $\alpha$  کوچکترین اندازه مثبت کان  $AM$  است.

دستور (۱۷) اندازه جبری کانهای را میدهد که سرهمه آنها در  $A$  و

تیه آنها در  $M$  باشد (کانهای  $AM$ )

تبصره - اگر سرکان را  $M$  و تیه آن  $A$  بگیریم مانند بالا خواهیم دید

که اندازه جبری کانهای  $MA$  از دستور  $MA = -\alpha + k \times c$  بدست می آید

که  $\alpha$  - اندازه جبری کانیت  $MA$  (منفی) که قدر مطلقش از همه کوچکتر باشد.

وزرش

۱- در یک دایره کانهای زیر را معین کنید :

۳۰° ، ۶۰° ، ۳۰۰° ، ۱۹۰° ، ۷۵۰°



۱۳۵° و ۸۵° -

۲- اندازه جبری تمام کانهائی را که سروته آنها روی سروته بریک از کانهائی درش

(۱) میباشد بنویسد.

۳- این کانها را با هم جمع کنید (از راه رسم)

۱۲۰° و ۳۰° ; ۱۲۰° و ۶۰° ; ۷۵° و ۹۰° -

۹۰° و ۷۵° ; ۴۵° و ۱۰۵° ; ۴۵° و ۱۸۰° -

۴۵° و ۱۸۰°

۱۸- از روی دستور (۱۷) دیده میشود که هرگاه سروته یک کان داده شوند اندازه جبری آن میتواند از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر کند و این است تفاوت میان کانهائی هندسی و مثلثاتی ولی اگر سرکان (یا ته آن) با اندازه جبری داده شود ته کان (یا سر آن) کاملاً معین است.

۱۹- صورتهای مختلف دستور (۱۷) بر حسب تغییراتی که در فرض کنیم

اندازه کان هندسی AM بر حسب رادیان  $\theta$  و  $\phi$  و اگر  $\theta$  و  $\phi$  بر حسب

درجه باشد میبینیم که اندازه پیرامون دایره محاسب این محاسبه بر حسب  $2\pi$  و  $360^\circ$  و اگر  $\theta$  و  $\phi$  بر حسب رادیان باشد دستور (۱۷) فرض کنیم بر حسب

کان رادیان  $\theta$  و  $\phi$  باشد باید آن را بر حسب تصویرتهائی زیر نوشت.

$$(۱۸) \quad \widehat{AM} = \alpha + 5 K \pi$$

$$(۱۹) \quad \widehat{AM} = \pi^{\circ} + K \times ۳۶۰$$

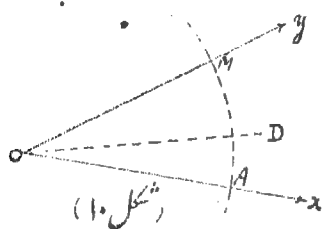
$$(۲۰) \quad \widehat{AM} = \pi^{\circ} + K \times ۴۰۰^{\circ}$$

۲. سووشانه و اندازه جبری گوشه دو نیم خط  $xy$  اگر گوشه  $xy$  (گوشه

میان دو نیم خط  $ox$  و  $oy$ ) داده شود برای اندازه گرفتن آن میتوان بره زیر

عمل کرد: دایره ای بمرکز  $O$  و پرتو

رخواهیم (مثل ۱۰) تا  $ox$  را



در  $A$  و  $oy$  را در  $M$  تلاقی کند

اندازه دکان بندی  $AM$  چنان اندازه گوشه مرکزی  $xy$  است مثلاً اگر

اندازه دکان بندی  $AM$  بحسب زین ۳۰ باشد اندازه گوشه بندی  $xy$  نیز ۳۰ است

پس همچنانکه اندازه دکان  $AM$  برابر را می است که متحرکی روی آن مکان از  $A$

در مکان  $M$  دیده گان می پیاید. در مورد گوشه هم میتوان گفت که اندازه

گوشه  $xy$  برابر گوشه است که باید بدان اندازه نیم خط  $oy$  را که نخست روی  $ox$

پهلوی نخست گوشه است و عمل کرد اینچنین تا به نیم خط  $oy$  (پهلوی دوم) منطبق

شود [مثال: حرکت دقیقه شمار ساعت در مدت ۲۰ دقیقه ۱۲۰ زینگی

در یک ساعت ۲۰ دقیقه ۴۲۰ زینگی]

دلی نیم خط  $OD$  را که نخست روی  $OX$  بگیریم میتوان به دو سوگردانید تا نیم خط  $OY$  منطبق شود؛ سوی مثبت که همان مثبت شدتاتی باشد و سویی منفی - پس مانند آنچه در مورد دکانها گفتیم یک گوشه بهم دارای اندازه های جبری بیشتر است که از روی یکی از دستورهای (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) بدست میآید چنین نوشته میشود:

$$(18) \quad x \hat{O} y = (Ox, Oy) = \alpha + 2\kappa\pi$$

$$(19) \quad x \hat{O} y = (Ox, Oy) = \pi + \kappa \quad 2\epsilon$$

$$(20) \quad x \hat{O} y = (Ox, Oy) = \pi^2 + \kappa \quad 2\epsilon^2$$

در این جا هم اگر پهلوی نخست را  $Oy$  بگیریم یعنی اگر اندازه های گوشه های

$$y \hat{O} x = (Oy, Ox)$$

را بنحوا هم کافی است در این دستور ترتیب  $\alpha$  و

$\pi$  را به  $\alpha$  - و  $\pi$  - و  $\pi^2$  - تبدیل نماییم.

و بهمان طور که در مورد دکان گفتیم شدی بنیم اگر پهلوی نخست و پهلوی دوم یک گوشه را داشته باشیم اندازه جبری آن گوشه میتواند  $\infty$  - تا  $\infty$  تغییر کند.

و عکس اگر مثلاً پهلوی نخست و اندازه جبری گوشه ای را داشته باشیم پهلوی دوم کاملاً مشخص است.

۱- این گوشه مارا با ب زید:

$$۲۷^{\circ} \text{ و } ۳۰^{\circ} - ۷۲۰^{\circ} + ۵۰^{\circ} - ۱۲۲۰^{\circ} - ۱۱۱۰^{\circ} \text{ و } ۵۰^{\circ}$$

این گوشه مارا با هم جمع کنید (از راه رسم):

$$(۲) \quad ۱۲۰^{\circ} \text{ و } ۳۰^{\circ} \quad (۳) \quad -۱۲۰^{\circ} \text{ و } ۶۰^{\circ}$$

$$(۴) \quad -۷۵^{\circ} \text{ و } -۹۰^{\circ} \quad (۵) \quad ۹۰۰^{\circ} \text{ و } -۷۵^{\circ}$$

$$(۶) \quad -۴۵^{\circ} \text{ و } ۱۰۵^{\circ} \quad (۷) \quad ۳۵۰^{\circ} \text{ و } -۱۸۰^{\circ}$$

با یک نقاله دو حاصل جمع زیر را بدست آورید: (بدون اینکه روی کاغذ چیزی بکشید)

$$(۸) \quad ۲۷^{\circ} + ۳۰^{\circ} + (-۳۵^{\circ}) + ۲۷^{\circ} + (-۴۰^{\circ})$$

$$(۹) \quad -۱۲۰^{\circ} + ۵۷^{\circ} - ۲۱^{\circ}$$

(۱۰) - اگر شید حرکت عقربهای ساعت را از پشت ساعت هم ببینیم (مثلاً اگر شید

ساعت شفاف بود) و اگر دو عقرب یکی از جلو و دیگری از پشت ساعت نگاه میکردید آیا چشم

این دو نفر گوشه یکسانی از عقربهای می بینید یکسان بود؟

۲۱- اگر در دستور (۱۷) عدد درست  $\frac{1}{2}$  را به ترتیب برابر  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$

بگیریم دو مکان  $x_1$  و  $x_2$  بدست می آید:

$$x_1 = \alpha + \frac{1}{3}c$$

$$x_2 = \alpha + \frac{1}{4}c$$

اگر این دو کان را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$x_1 - x_2 = (k_1 - k_2) c$$

$k_1 - k_2$  عدد درستی است پس تفاضل دو کان که دارای یک سرویت می باشد مضرب درستی است از پیرامون دایره - همین قضیه در مورد ثنائی میان دو نیم خط نیز درست است.

وزرش ۱- وارون این قضیه را ثابت کنید.

وزرش ۲- از روی این قضیه روشن سازید که میتوان در دستور (۱۲)  $\alpha$  را

اندازه جبری یکی از گانهای  $AM$  گرفت - بجای اینکه اندازه کوچکترین گان مثبت  $AM$  باشد - مثلاً اگر یک گان  $AM$  برابر  $۱۳^\circ$  باشد اندازه جبری همه گانهای  $AM$  را میتوان نوشت:

$$\widehat{AM} = ۱۳^\circ + k \cdot ۲۶^\circ$$

میتوان نیز چنین نوشت

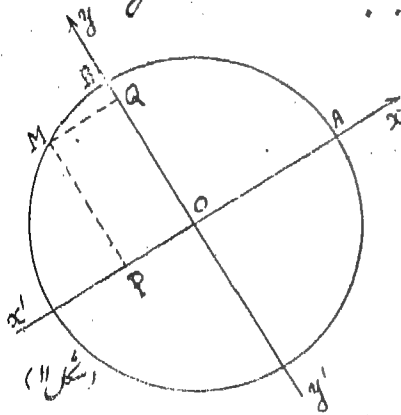
$$\widehat{AM} = -۲۳^\circ + k' \cdot ۲۶^\circ \quad (K' \text{ عدد درست})$$

زیرا  $-۲۳^\circ$  - اندازه جبری یکی از گانهای  $AM$  است (در اندازه  $-۱$ )  $(K = -۱)$

۲۲- دایره مثلثاتی - دایره ایست که بتوان برابر یک درازا باشد روی

پیرامون آن سوی مثبتی برگزیده باشند - این سوی مثبت معمولاً همان سوی

مثبت مثلثاتی است یعنی سوی مخالف گردش عقربک های ساعت (شکل ۱۱)  
 آسه سینوس و آسه سینوس متمم - فرض کنیم روی پرایون ایره مثلثاتی نقطه  $A$   
 سرکانائی باشد - آسه  $x'ox$  را منطبق بر  $OA$  و آسه  $y'oy$  را عمود بر آن  
 می کشیم - روی  $x'ox$  سوی مثبت را از  $O$  به  $A$  میگیریم و روی  $y'oy$  سوی  
 مثبت را طوری میگیریم که  $OA$  بتواند پس از گردش  $90^\circ$  زین در سوی مثبت  
 مثلثاتی روی آن قرار گیرد یعنی موجب (۲۰)  $(ox, oy) = 90^\circ$  :



آسه  $x'ox$  را آسه

سینوس متمم  $y'oy$  را آسه

سینوس  $x'ox$  برای کمانیکه

سر آنها در  $A$  است

مینا مند . (شکل ۱۱)

و زرش - کمانائی در دایره مثلثاتی بگیرد که سر به نقطه دخیای  $A$  و اندازه

جبری آنها برتیب  $30^\circ$  ;  $75^\circ$  ;  $120^\circ$  و  $150^\circ$  ;  $210^\circ$  و  $240^\circ$  ;

$300^\circ$  باشد - نخست آسه سینوس و سینوس متمم این کمانها را بکشید و سپس اگر تیره

این کمانها برتیب نقطه های  $A_1$  و  $A_2$  ...  $A_6$  بنامیم متین کنید

آسه سینوس و سینوس متمم کمانائی را که سر آنها برتیب یکی این نقطه باشد

سینوس و سینوس متمم - فرض کنیم روی پیرامون دایره مثلثاتی  $M$  تیره  
 کان و بخوابی باشد که سر آن در  $A$  است و مختصات  $M$  نسبت به دایره  
 $x'ox$  و  $y'oy$  بترتیب

$$x = \overline{OP} \quad \text{و} \quad y = \overline{OQ} \quad \text{باشد (شکل ۱۱)}$$

$\overline{OP}$  (اندازه جبری  $OP$  روی آسه  $x$  تا) را سینوس متمم  $\widehat{AM}$  و  $\overline{OQ}$   
 (اندازه جبری  $OQ$  روی آسه  $y$  تا) را سینوس  $\widehat{AM}$  مینامند:

$$\sin \widehat{AM} = \overline{OQ}$$

$$\cos \widehat{AM} = \overline{OP}$$

یعنی اگر  $\alpha$  یکی از اندازه های جبری کان  $AM$  به حسب رادیان باشد خواهیم  
 داشت:

$$\sin \alpha = \overline{OQ}$$

$$\cos \alpha = \overline{OP}$$

و چون اندازه گوشه مرکزی  $AOM$  و یا گوشه  $(OA, OM)$  برابر اندازه  
 کان  $AM$  است پردازشهای مثلثاتی این کان را پردازشهای مثلثاتی آن  
 گوشه بسم مینامند و بعکس چنانکه در شکل بسم دیده میشود سینوس و سینوس  
 متمم هر گوشه یا کان عدد ثابت جبری که نمی تواند اندازه ۱- کوچکتر و یا

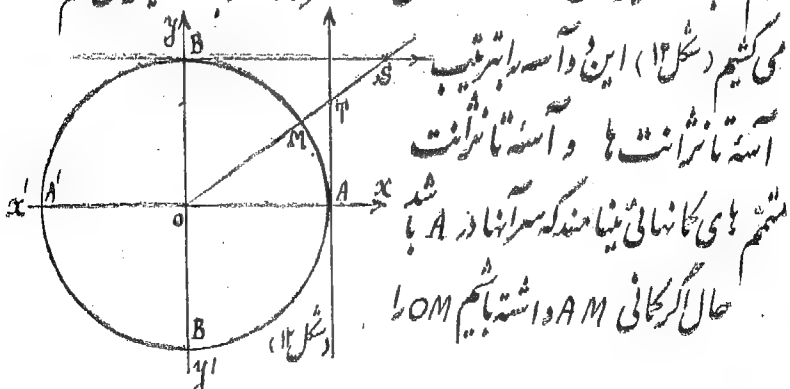
از  $a$  بزرگتر باشد (بعبارت دیگر در مطلق آن از  $a$  بزرگتر نیست) زیرا  
 هر کجا  $M$  را بگیریم نقطه  $P$  میان  $A$  و  $A'$  (و یا روی یکی ازین دو نقطه) بود  
 و نقطه  $Q$  نیز میان  $B$  و  $B'$  و یا روی یکی ازین دو نقطه خواهد بود. و  
 $OA = OB = 1$  بر دو دایره مثلثاتی است.

در شکل ۱۱ سینوس  $AM$  مثبت و سینوس متمم آن منفی است.

و چون این دو عدد جبری (سینوس و سینوس متمم) با تعین یکدیگر در  
 کمان (و یا گوشه) تعیین می کنند آنها را پیر و ویا پردازش های مثلثاتی کمان  
 (و یا گوشه) می نامند.

و چون با تعریف بالا پردازش های مثلثاتی اندازه جبری دو پاره خط پنا  
 آنها را خط های مثلثاتی نیز می گویند.

تاثر انت و تاثر انت متمم - از  $A$  (سیر کمان) آسای همرو (دوای)  
 و هم سو با آسای سینوس تا  $B$  آسای همسو و همسو با آسای سینوس متمم تا





می کشیم تا آنکه تاثرانت ما را در  $T$  و آنکه تاثرانت متمم ما را در  $S$  تلاقی کند -  $\overline{AT}$  (اندازه جبری  $AT$  روی آنکه تاثرانت ما) را تاثرانت  $\overline{AM}$  بنامند و  $\overline{BS}$  (اندازه جبری  $BS$  روی آنکه تاثرانت متمم ما) تاثرانت متمم  $\overline{AM}$  نامیده میشود.

$$\tan \overline{AM} = \overline{AT}$$

$$\cot \overline{AM} = \overline{BS}$$

مانند آنچه درباره سینوس و سینوس متمم گفتیم اینجا نیز میتوان گفت که تاثرانت و تاثرانت متمم پیروای پروانه های کان (یا گوشه) میباشند و آنها را خطهای مثلثاتی نیز بنامند.

اگر نقطه  $M$  تعیین کند و پیرامون دایره مثلثاتی را به پیامید یعنی اگر  $\overline{AM}$  دیا (  $OA, OM$  ) همه اندازه های جبر را بگیرد  $T$  تمام آنکه تاثرانت ما  $S$  تمام آنکه تاثرانت متمم ما را می پیامید - پس تاثرانت و تاثرانت متمم برخلاف سینوس و سینوس متمم میتوانند برابر عدد جبری گردند ( شماره

۲۲ را به سپید)

۲۲ - نشان پروانه های مثلثاتی - آنکه سینوس متمم ما و آنکه سینوس ما

پیرامون دایره مثلثاتی را به چهار بخش میکنند (شکل ۱۳)

تیرکانهایی که اندازه آنها از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  باشد روی بخش نخست است.

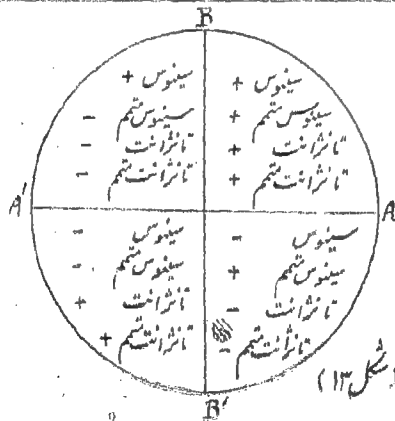
از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  باشد دوم

از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  باشد سوم

از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  باشد چهارم

در روی شکل های (۱۱) و (۱۲) نتیجه های زیر دیده میشود:

تیرکان	در بخش نخست	در بخش دوم	در بخش سوم	در بخش چهارم
نشانه سینوس	+	+	-	-
سینوس متعم	+	-	-	+
تاثرات	+	-	+	-
تاثرات متعم	+	-	+	-



(شکل ۱۳)

- ۱- در بخش نخست هر چهار متغیر مثبت است  
 ۲- هر چه باشد تیرکان نشانه تاثرات تاثرات متعم را کم می‌کند

## پرسش های ساده

۱- در کدام بخش زاویه نشان دهنده مثبت است؟ در کدام سینوس متهم؟

در کجا تانژانت مثبت است یعنی؟ در کدام بخش تانژانت متهم؟

۲- آیا گوشه ای هست که تانژانت آن مثبت و تانژانت متهم آن منفی باشد؟

۳- آیا گوشه ای هست که سینوس آن مثبت و سینوس متهم آن منفی باشد؟

۴- هرگاه گانی (یا گوشه ای) طوری باشد که:

الف - سینوس آن مثبت و تانژانت آن منفی

ب - تانژانت آن مثبت و سینوس متهم آن منفی

ج - تانژانت متهم آن منفی و سینوس آن مثبت

د - سینوس آن مثبت و سینوس متهم آن منفی

پایان چه بخشی است؟ (یا آن گوشه چند است؟)

۵- نیمه گانی  $\alpha$  در چه بخش (یا بخشها) است؟ هرگاه

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad (1) \quad \cos \alpha = \frac{1}{3} \quad (2) \quad \tan \alpha = \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{3} \quad (4) \quad \cos \alpha = \frac{1}{3} \quad (5) \quad \tan \alpha = \frac{1}{3} \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad (7) \quad \cos \alpha = -\frac{1}{3} \quad (8)$$

$$\sin \alpha < 0, \tan \alpha = 3 \quad (9) \quad \sin \alpha < 0, \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

۶- چه کانهایت (از ۰ تا ۳۶۰) که

(۱) تاثرات آن برابر (۲) تاثرات آن ۱- (۳) سینوس آن  $\frac{1}{2}$

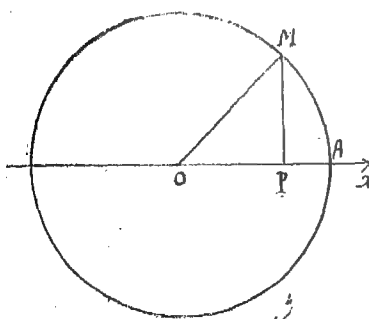
باشد؟ (شماره زیندهای این کاغذ را بگویند)

۷- خطهای مثلثاتی کمانها (یا گوشه‌ای) زیر از روی تعریف بدست آورید:

۹۰° : ۲۷۰° : ۱۸۰° : ۳۶۰°

تبصره- در بخش این کتاب بردارهای مثلثاتی گوشه‌های شده (یعنی گوشه‌های راکه از صفر بزرگتر و از یک گوشه است کوچکتر است) تعریف کرده گفتیم که همه آنها مثبت میباشند

و در بالا پر دازشهای مثلثاتی همه کاغذها و بنا برین همه گوشه‌ها را (چه کوچکتر از یک گوشه راست چه بزرگتر یا چه مثبت و چه منفی) تعریف کردیم دیدیم هر که ام میتواند مثبت باشد یا منفی. در حقیقت در اینجا تعریفهای راکه در بخش نخست کتاب نموده بودیم عمومیت دادیم.



(شکل ۱۱)

و مورد گوشه‌های تند (یا کانهای

کوچکتر از یک چهارم پیرامون) نیز تعریف

یکسخت: مثلاً سینوس گوشه  $\angle AOM$

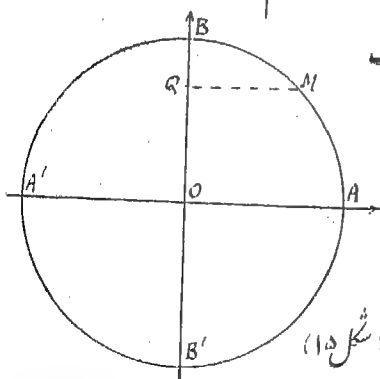
(شکل ۱۱) از روی تعریف بخش نخست کتاب

نسبت  $\frac{PM}{OM}$  است چون در اینجا  $OM$  پرتو دایره مثلثات است و برابر یک درازا پس  $\frac{PM}{OM} = PM$  یعنی سینوس گوشه  $POM$  برابر است با اندازه همتای  $PM$  که مثبت است و از روی تعریفی هم که اینجا کردیم پروازشهای مثلثاتی گوشه های تند مثبت است.

نیز از اینجا دانستیم که بجه علت پرتو دایره مثلثاتی را برابر یک درازا می گیرند.

۲۴- تغییرات پروازشهای مثلثاتی - اگر  $M$  تان کان  $AM$  از  $A$  آغاز حرکت کند و یک دور پیرامون دایره را به پیماید یعنی کان  $AM$  همه مقدارهای از  $0$  تا  $2\pi$  را بگیرد پروازشهای مثلثاتی این کان هم تغییر نمیکنند و مقدارشانیکه این پروازشهای گیرند باسانی از روی شکل دیده میشود:

الف- تغییرات سینوس - فرض کنیم حرکت  $M$  در سوی مثبت



مثلثاتی باشد. وقتی  $M$  در  $A$  است

یعنی وقتی کان  $AM$  صفر است

$Q$  در  $O$  میباشد (شکل ۱۵)

و  $Q$  صفر است و هر چند

$M$  از  $A$  دورتر شده به  $B$

نزدیک شود  $Q$  نیز روی  $OB$  از  $O$  دورتر شده به  $B$  نزدیکتر میشود یعنی وقتی کان

از صفر ترقی کند تا به  $\frac{\pi}{4}$  برسد سینوس آن از ۰ ترقی میکند و به  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  میرسد (۹)  
 همین ترتیب می بینیم وقتی کان از  $\frac{\pi}{4}$  ترقی میکند تا به  $\frac{\pi}{2}$  برسد سینوس  
 آن از  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  + تنزل میکند تا صفر برسد - و چون کان از  $\frac{\pi}{2}$  ترقی نماید و به  $\frac{3\pi}{4}$   
 برسد سینوس آن از ۰ تنزل مینماید و به -۱ میرسد .  
 و هرگاه کان از  $\frac{3\pi}{4}$  ترقی کند و به  $\pi$  برسد سینوس آن از -۱ تا ۰  
 ترقی میکند:

جای M	A	B	A'	B'	A
اندازه $\widehat{AM}$	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{4}$	$2\pi$
اندازه سینوس $\widehat{AM}$	۰	۱	۰	-۱	۰

تصور ۱- روشن است که اگر تیر کان با حرکت کند دور A نایستد یعنی  
 اگر اندازه کان از  $2\pi$  ترقی نماید سینوس کان دوباره همان اندازه های پیش را  
 میگیرد [مثلاً  $\sin 39^\circ = \sin (36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ$  یعنی اگر  $\alpha$  یکی  
 از اندازه های جبری  $\widehat{AM}$  باشد و بحسب رادیان) بطور کلی خواهیم داشت:

$$\sin (\alpha + 2K\pi) = \sin \alpha$$

گویند سینوس پریودیک است دوره که دوره آن  $2\pi$  است بدین معنی که اگر  
 بر کان  $2\pi$  یا مضرب دستی از  $2\pi$  بیفزاییم و یا از آن بکاهیم در سینوس کان

تغییری رخ نمیدهد. و این نتیجه از روی تعریف هم بدست میآید زیرا در تعریف  
 پیرامونهای مثلثاتی تنهاترکان بکار میرود نه اندازه جبری آن.  
 بنظره ۲- در ضمن بدست آوردن تغییرات سینوس یک کان دانستیم که برای  
 فضای میان  $0$  و  $\frac{\pi}{4}$  تغییرات کان تغییرات سینوس آن در یک سو  
 میباشد یعنی اگر کان ترقی کند سینوس نیز ترقی میکند و بعکس (۹)  
 بنظره ۳- نیز در ضمن دیده شد که

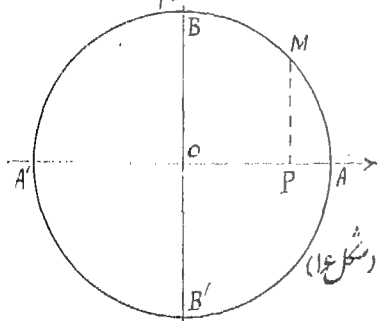
$$\sin 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = -1$$

ب- تغییرات سینوس متمم - اگر مانند پیش فرض کنیم  $M$  یعنی ترکان و



پیرامون دایره یک دور  
 تمام بزند (شکل ۱۶)  
 سینوس متمم کان چنین  
 تغییر خواهد کرد:

A	B'	A'	B	A	جای M
$\nwarrow 2\pi$	$\nwarrow \frac{3\pi}{4}$	$\nwarrow \pi$	$\nwarrow \frac{\pi}{4}$	$\nwarrow 0$	اندازه $\widehat{AM}$
$\nwarrow 1$	$\nwarrow 0$	$\nwarrow -1$	$\nwarrow 0$	$\nwarrow 1$	اندازه سینوس متمم $\widehat{AM}$

در ضمن دیده میشود که از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  سوی تغییرات سینوس متمم همان وارونه نوی  
تغییرات همانست یعنی اگر همان ترقی کند سینوس متمم آن تنزل میکند و بالعکس (۹)  
باز دیده شد که

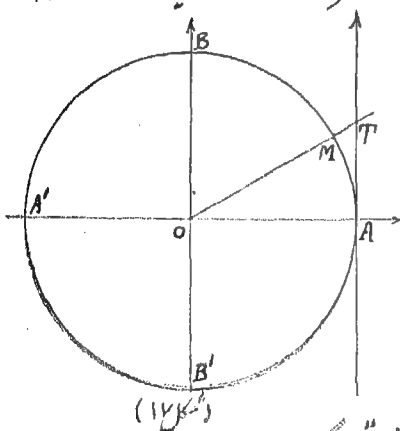
$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

در تغییرات تانژانت - اگر مانند پیش  $M$  را حرکت دهیم می بینیم :  
وقتی که  $M$  در  $A$  است (شکل ۱۷)  $AT$  صفر است و وقتی که  $M$  از  $A$



دور شد و به  $B$  نزدیک کرد

$AT$  صفر ترقی کرده بزرگ شود

و وقتی که  $M$  خیلی نزدیک

به  $B$  شود  $AT$  بی اندازه

بزرگ میگردد (۹) و اگر  $M$  در

$B$  باشد خط  $OM$  آینه تانژانت ما را تلاقی نمیکند.

حال اگر  $M$  کمی از  $B$  بسوی  $A'$  رود امتداد  $OM$  آینه تانژانت ما را خیلی دور

ولی در طرف منفی تلاقی مینماید یعنی  $AT$  بسبب قدر مطلق بسیار بزرگ ولی

منفی است.

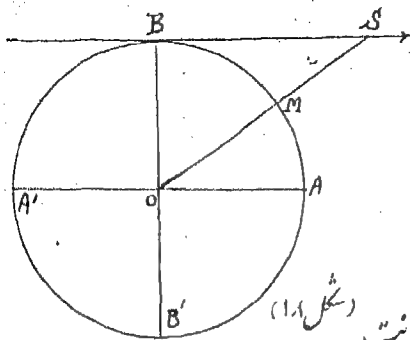


پس هرگاه اندازه کان کمی کوچکتر از  $\frac{\pi}{4}$  بوده و بخواهد ترقی کرده کمی بزرگتر از  $\frac{\pi}{4}$  گردد تا اثرش آن ناگهان از یک مقدار مثبت بسیار بزرگ به یک مقدار منفی بسیار کوچک (یعنی ارای متدرج و مطلق بسیار بزرگ) تغییر میکند. کویتم تا اثرش پردازشی است از کان بطوریکه وقتی کان  $\frac{\pi}{4}$  باشد منفصل است. همین ترتیب می بینیم که هرگاه کان از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\pi$  و از  $\pi$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  ترقی کند تا اثرش آن از یک مقدار منفی بسیار کوچک  $(-\infty)$  ترقی نموده بصفر میرسد از صفر نیز تا  $+\infty$  ترقی میکند.

باز وقتی که  $M$  میخواهد از  $B$  بگذرد تا اثرش  $AM$  ناگهان از  $+\infty$  به  $-\infty$  تغییر میکند یعنی درازا  $\frac{3\pi}{4}$  بهم تا اثرش منفصل است. وقتی کان از  $\frac{3\pi}{4}$  تا  $2\pi$  ترقی کند باز تا اثرش از  $-\infty$  تا صفر ترقی میکند:

جای $M$	$A$	$B$	$A'$	$B'$	$A$
اندازه $AM$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{4}$	$2\pi$
اندازه $AM$	$+\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$

ایده میشود که تغییرات تاثرات یک کان و تغییرات خود کان همه جادوی یکدیگرند. تغییرات تاثرات ششم - (شکل ۱۸) - همچنانکه مورد تاثرات وید



شد خواهم دید که :

(۱) سوی تغییرات

تاثرات متمم وارونه

سوی تغییرات کمانست

یعنی وقتی مکان ترقی مینماید تاثرات (شکل ۱۸)

متمم آن تنزل میکند و بعکس [خواهیم دید که تاثرات متمم هر مکان ازون تاثرات

همان کمانست (شماره ۲۸ دستور ۷)]

(۲) درازا  $\pi$  و تاثرات متمم منفصل است :

جای M	A	B'	A'	B
اندازه $\widehat{AM}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$
تاثرات متمم $\widehat{AM}$	$\infty$	$0$	$\infty$	$0$

پیش

۱- آیا مکانی هست که سینوس آن ۲٫۳ و یاسینوس متمم آن ۳- باشد؟

۲- آیا مکانی هست که تاثرات آن ۳ و یا  $\frac{1}{4}$  - باشد؟ یا تاثرات متمم آن ۳

و یا  $\frac{3}{4}$  باشد؟ اگر هست اثر ازونی دایره مثلثاتی نشان دهید

۳- کمانهای رانشان دهید که سینوس آنها  $\frac{1}{4}$  است یا سینوس متمم آن  $\frac{3}{4}$

تصوره - پنجاه و دو دور سینوس دید شد می توان دید که سینوس در این  
و تانژانت متمم بر دایره هالی هستند و در  
دوره سینوس متمم مانند دوره سینوس  $2\pi$  است یعنی

$$\cos(\alpha + 2K\pi) = \cos \alpha$$

دوره تانژانت و تانژانت متمم هر یک  $\pi$  است (از روی یک  
شکل روشن است):

$$\tan(\alpha + K\pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + K\pi) = \cot \alpha$$

ورزش

طرف دوم برابرهای زیر را بنویسید:

$$(1) \sin 39^\circ = \sin(36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{4}$$

$$(2) \sin 42^\circ =$$

$$(3) \cos 42^\circ =$$

$$(4) \tan 21^\circ =$$

$$(5) \cot 22^\circ =$$

$$(6) \sin 76^\circ =$$

$$(7) \cot 40^\circ =$$

$$(8) \cos 13^\circ =$$

$$(9) \tan 69^\circ =$$

پایخ (۳) تا (۹) را می توان با بساطی از روی یک دایره مثلثاتی داد

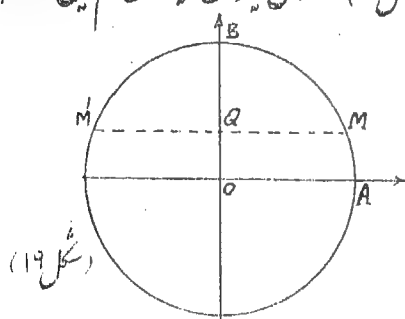
$$(۱۰) \sin ۴۴^\circ = \sin (۳۶^\circ + ۸^\circ) = \sin ۸^\circ$$

$$(۱۱) \sin ۳۷^\circ = \quad (۱۲) \quad \operatorname{tg} ۴۴^\circ =$$

$$(۱۳) \operatorname{tg} ۷۱^\circ = \quad (۱۴) \quad \operatorname{tg} (\pi + \frac{\pi}{6}) =$$

$$(۱۵) \cot (n\pi + \frac{\pi}{3}) = \quad (۱۶) \quad \sin (2n\pi + \frac{\pi}{4}) =$$

۲۵- تعیین کنانهای یک یکنواختی است داده شده  
مسئله نخست - بدست آورید کنانهای راکه سینوس آنها برابر  $\frac{1}{3}$  است  
اگر A را سر این کنان بگیریم (شکل ۱۹)، آنگاه سینوس و سینوس ششم این کنان برابر



(شکل ۱۹)

آنگاه  $OA$  و  $OB$  است

اگر روی  $OA$

عدد جبری  $\frac{1}{3}$  را بگیریم نقطه

Q بدست میآید  $OQ = \frac{1}{3}OB$

حال از Q خطی بر  $OB$  میکشیم تا پیرامون دایره متقاطع را در نقطه M  
و M تلاقی نماید - تمام کنانهای سرانجام A و M آنها را در M و یاد M با

پنج مسئله اند زیرا سینوس همه آنها  $OQ$  است یعنی  $\frac{1}{3}$

پس اگر کوچکترین اندازه مثبت کان AM را  $\alpha$  بنامیم (یعنی اگر کوچکترین

کان منفی باشد که سینوس آن  $\frac{1}{3}$  است - این کان را میتوان از روی جدول

بدست آورد:  $\alpha = ۲۳۹۸ \cdot ۰$  رادیان  $= ۲۸^\circ ۱۹'$  یکی از گانهای  $AM'$  برابر  $\pi - \alpha$  میباشد و خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = \alpha + ۲K\pi$$

$$\widehat{AM}' = \pi - \alpha + ۲K'\pi = (۲K' + ۱)\pi - \alpha$$

که چون بجای  $K$  و  $K'$  عددی درست (مثبت یا منفی یا صفر) بگذاریم همه گانهای پاسخ مسئله بدست میآید: مسئله پاسخهای چهار دارد و سیستون اندازه جبری همه را از روی یکی از آنها بدست آورد.

اگر بجای  $\frac{۱}{۳}$  عدد  $\frac{۱}{۴}$  داده شود کوچکترین اندازه مثبت  $\widehat{AM}$  چسب زینه ۳۰ است و خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = ۳۰^\circ + K ۳۶۰^\circ$$

$$\widehat{AM}' = ۱۵۰^\circ + K' ۳۶۰^\circ$$

تبصره - چون همواره اندازه جبری سینوس مرکبانی میان ۱- و ۱+ میباشد (یا انتها برابر یکی ازین دو عدد) پس اگر مثلاً بگوئید گانهای  $\frac{۱}{۳}$  را پیدا کنید که سینوس آنها  $\frac{۲}{۳}$  و یا  $\frac{۱}{۳}$  - باشد روشن است که پاسخی برای مسئله نخواهیم یافت.

پیدا کنید همه کمانهای را که سینوس آنها یکی ازین عددها میباشد (در حائیکه باید از جدول گنگ بگیرید)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, 0.71, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{7}, 1, 0$$

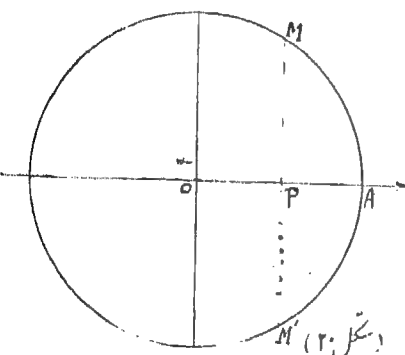
مسئله دوم - بدست آورید همه کمانهای که سینوس متمم آنها برابر  $\frac{1}{4}$  باشد  
میدانیم سینوس متمم  $\frac{1}{4}$  برابر  $\frac{3}{4}$  است ولی نباید فوراً گفت که مثلث  
 $\frac{3}{4}$  پانچ مسئله است بلکه مانند پیش خواهیم دید که شماره پانچ ثانی شمار است  
چیزی که بست با داشتن  $\frac{3}{4}$  که یکی از پانچهاست میتوان اندازه جبری بگانه  
پانچ مسئله را نوشت.

باز اگر سر کمانها در  $A$  گرفته شود

کافی است وی آسه  $OA$  (شکل ۲۰)

یعنی آسه سینوس متمم  $OP$  را

برابر عدد جبری  $\frac{1}{4}$  بگیریم



و از  $P$  خطی بر  $OA$  عمود کنیم تا پیرامون دایره مثلثاتیرا در  $M$  و  $M'$  تلاقی نماند.

تمام کمانهای سرانها در  $A$  و ته آنها یا در  $M$  و یا در  $M'$  باشد پانچ مسئله اند.

چون یکی از کمانهای  $AM$  برابر  $\frac{3}{4}$  است یکی از کمانهای  $AM'$  را میتوان  $\frac{3}{4}$ .

گرفت و خواهیم داشت :

$$\widehat{AM} = 6^\circ + K \cdot 36^\circ$$

$$\widehat{AM}' = -6^\circ + K' \cdot 36^\circ$$

یعنی همه کمانها (یا گوشه ثانی) که اندازه جبری آنها از دستور

$$\pm 6^\circ + K \cdot 36^\circ$$

بدست میآید پانچ مسئله باشند .

بخصوص - باید در نظر داشت که اندازه جبری سینوس متمم هم باید همیشه میان

۱- و ۱+ یا منتهی برابر بی ازین دو عدد) باشد

ورزش

پیدا کنید همه کمانهای (یا گوشه ثانی) را که سینوس متمم آنها بی ازین حد باشد .

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{8} ; \frac{\sqrt{3}}{4}$$

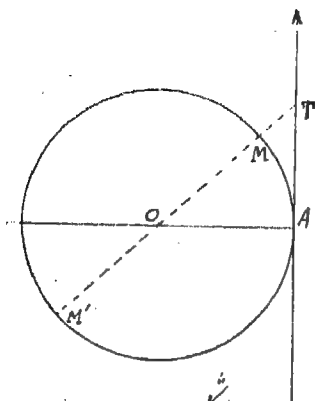
$$0 ; \frac{4}{9} ; \frac{3}{11} ; 1$$

مسئله سوم - کمانهای را بدست آورید که تاثرات آنها برابر

عدد  $\alpha$  باشد .

عددی جبری  $\alpha$  را روی آینه تاثرات میگیریم تا نقطه T بدست

آید (  $\overline{AT} = \alpha$  ) ( شکل ۲۱ ) . خطی از T بمرکز دایره مثلثاتی می کشیم



شکل ۲۱

نایب المون آن

دایره در دو نقطه

$M$  و  $M'$  تلاقی

کند - همه گانه‌ای

$AM$  و همه گانه‌ای

$AM'$  پاسخ مسئله می‌شود.

اگر  $\alpha$  اندازه یکی از گانه‌های  $AM$  باشد (بجای رادیان) اندازه یکی از گانه‌های  $AM'$  را می‌توان  $\alpha + \pi$  گرفت بنابراین خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = \alpha + 2K\pi$$

$$\widehat{AM'} = \alpha + \pi + 2K'\pi$$

پس اندازه تمام گانه‌هایی که پاسخ مسئله اند (هم  $AM$  و هم  $AM'$ ) از دستورات

$$\alpha + K\pi$$

به دست می‌آید که در آن  $K$  عددیست درست (مثبت یا منفی یا صفر)

تجربه - هر چه باشد اندازه عدد صحیحی  $\alpha$  مسئله پاسخ می‌شود دارد

که همه آنها را می‌توان با داشتن یکی از آنها بدست آورد.

ورزش



کمانهای  $x$  را در هر یک از حالت‌های زیر بدست آورید :

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = 0$$

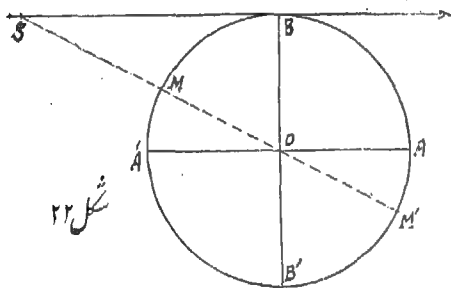
$$\operatorname{tg} x = 5,712$$

$$\operatorname{tg} x = 3,75$$

مسئله چهارم - کمانهای را بدست آورید که تاثرات متمم آنها برابر عددی  $\theta$

باشد.

کافیت روی آنسه تاثرات متمم  $\overline{BS}$  را برابر عدد جبری  $\theta$  گرفته  $SO$



بکشیم تا نقطه‌های  $M$  و  $M'$

بدست آید. (شکل ۲۲)

تمام کمانهای  $AM$  و  $AM'$

پایخ مسئله اند.

اگر در یکی از اندازه‌های  $AM$  باشد مانند مسئله سوم خواهیم دید که

اندازه جبری همه جوابهای مسئله از دستور

$$n + \frac{\pi}{2}$$

بدست می‌آید.

این مسئله هم همیشه پایخ دارد (هرچه باشد  $\theta$ )

۲۵- تبصره - چنانکه گفته شد باید در نظر داشت که در هر یک از چهار

مسئله بالا اگر یکی از پاسخها را بدانیم از روی آن میتوان اندازه جبری همه پاسخهای آن مسئله را نوشت.

### ورزش

۱- میان دو گوشه قائی بدست آورید که

$$(۱) \text{ سینوس آنها } \frac{1}{4} \text{ باشد یا } -\frac{1}{4} \text{ یا } \frac{1}{4} \text{ یا } -\frac{1}{4}$$

$$(۲) \text{ تانژانت آنها } ۱ \text{ باشد یا } -۱ \text{ یا } \sqrt{3} \text{ یا } ۳$$

$$۲- \text{ پیدا کنید همه کمانهای را که سینوس آنها } \frac{1}{4} \text{ و سینوس متمم آنها } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ است}$$

$$\text{یا همه کمانهای را که سینوس آنها } \frac{1}{4} \text{ و سینوس متمم آنها } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ است.}$$

$$۲۷- \text{ معمولاً همه کمانهای را که سینوس آنها عدد } a \text{ باشد چنین بنویسند:}$$

$$\arcsin a \text{ (یعنی کمانهایی که سینوس آنها } a \text{ است) و نیز بنویسند}$$

$$\arccos a \text{ (یعنی کمانهایی که سینوس متمم آنها } a \text{ است)}$$

$$\operatorname{arctg} a \text{ (یعنی کمانهایی که تانژانت آنها } a \text{ است)}$$

$$\operatorname{arccot} a \text{ (یعنی کمانهایی که تانژانت متمم آنها } a \text{ است)}$$

پس مثلاً بنا بر آنچه میدانیم

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

ورزش - عبارت کلی کمانهای زیر را بنویسید.

$$\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arc} \lg \sqrt{3}$$

$$\operatorname{arc} \cot \sqrt{3}$$

$$\operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{arc} \cos \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{arc} \sin \frac{3}{5}$$

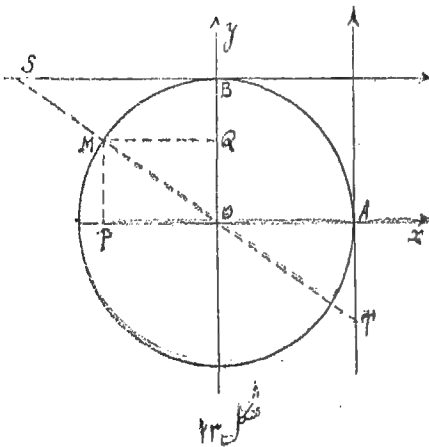
۲۸- بستگیهای میان خطهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه)

الف- اگر مطابق معمول تصویر  $M$  تیه کمان  $AM$  را روی آسه سینوس متمم

$P$  و روی آسه سینوس  $Q$  بنامیم (شکل ۲۳) و اگر کمان  $AM$  را به  $x$  نمایش دهیم میدانیم که

$$\sin x = \overline{OQ}$$

$$\cos x = \overline{OP}$$



ولی هر چه باشد اندازه  $x$

دو یا  $M$  روی پریامون

دایره مثلثاتی هر جا باشد

از سه بر  $Q$  که در آن

$QM$  برابر  $OP$  است

فیتجه میشود

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OM}^2 = 1$$

و چون در همه حال  $OP = |\cos x|$  و  $OQ = |\sin x|$

پس  $\overline{OP}^2 = \cos^2 x$  و  $\overline{OQ}^2 = \sin^2 x$  و بنا برین

$$(II) \quad \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

این همان تبگی (II) از شماره (۱۳) است - پس کمان (یا گوشه) هر چه باشد خواه کوچکتر از یک چهارم پیرامون دایره (و یا کوچکتر از گوشه راست) خواه بزرگتر از آن خواه مثبت و خواه منفی همیشه مجموع توانهای دوم سینوس و سینوس متمم آن برابر یک است.

ب - از شباهت سه برنامی  $OPM$  و  $OAT$  (شکل ۲۳) داریم:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} \quad \text{ولی} \quad OA = 1 \quad \text{و در همه حال}$$

$$PM = OQ = |\sin x| \quad \text{و} \quad OP = |\cos x| \quad \text{و} \quad AT = |\tan x|$$

$$\text{پس} \quad \boxed{\frac{|\sin x|}{|\cos x|} = |\tan x|}$$

و با مراجعه به نشانه‌های خط‌های مثلثاتی (شماره ۲۳) و یا با کشیدن شکل‌های مختلف دیده می‌شود که همیشه نشانه تانژانت یک کمان با نشانه هر سینوس آن بر سینوس متمم آن یکمیت پس برابری بالا نه تنها از حیث قدر مطلق بلکه از حیث نشانه هم درست است و میتوان نوشت:

(۵)

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

و این همان دستور (۵) از شماره ۸ است پس کان (یا گوشه) هر چه باشد تا زائنت آن برابر بجهت سینوس آن بر سینوس متمم آنست.

ج- مانند بالا میتوان از شباهت سه برنامی  $OQM$  و  $OBS$  (شکل ۲۳) ثابت نمود که

$$(۶) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

اینم دستور (۶) از شماره (۸) است - پس تا زائنت متمم هر کان (یا هر گوشه) برابر است با هر سینوس متمم آن بر سینوس آن.

از بنجیدن و بستگی (۵) و (۶) باید گویی بسینیم که برای هر کان یا گوشه

$$(۷) \quad \boxed{tg x \cdot \cot x = 1} \quad \text{و یا} \quad \boxed{tg x = \frac{1}{\cot x}}$$

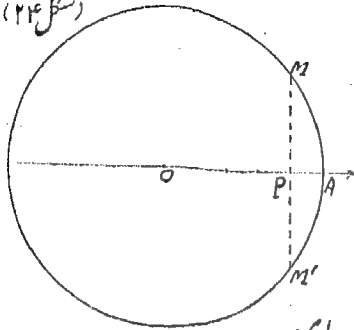
تبصره - همچنانکه در مورد خطای مثلثاتی یک گوشه تذکره شد (۱۱۴)

اگر یکی از پر دازشهای مثلثاتی یک کان (یا یک گوشه) بدست باشد و اگر بدانیم که آن در چه بخشی از پیدامون دایره مثلثاتیت میتوان از روی بستگی (۱۱) و (۵) و (۷) دیگر خطای مثلثاتی آن کانرا حساب کرد.

مثال - سینوس متمم کانی که ما آن را  $a$  مینامیم  $\frac{۴}{۵}$  است میخواهیم پر دازشهای دیگر  $a$  را حساب کنیم - نخست از روی (۱۱)  $\sin a$  بدست میآید:

$$tg a = \pm \frac{۳}{۴} \quad \sin a = \pm \frac{۳}{۵} \quad \text{و سپس از روی (۵)}$$

(شکل ۲۴)



بانگای شکل ۲۴ که در آن

$\overline{OP}$  برابر  $\frac{4}{5}$  است می بینیم

$\alpha$  می تواند برابری از گانهای

$AM$  و یا برابری از گانهای

$AM$  باشد - اگر  $\alpha$  برابر یکی از گانهای

$AM$  باشد (تیکان در بخش نخست) همه پردازشهای  $\alpha$  مثبت بوده باید نشانه

+ را جلوی  $\sin \alpha$  و  $tg \alpha$  گذاشت:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$tg \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

و اگر  $\alpha$  برابر یکی از گانهای  $AM'$  باشد (تیکان در بخش چهارم) نشانه - باید

گرفته شود:

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$tg \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = -\frac{4}{3}$$

و زرش

خطای شگفتی دیگر  $x$  را حساب کنید بفرض اینکه

$$\cos x < 0, \quad \sin x = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\sin x < 0, \quad \cos x = \frac{2}{11} \quad (2)$$

$$\sin x > 0, \quad tg x = -2 \quad (3)$$

$$\cos x < 0, \quad \cot x = +2 \quad (۴)$$

$$\cos x < 0, \quad \sin x = \frac{15}{17} \quad (۵)$$

$$\sin x < 0, \quad \cos x = -\frac{21}{29} \quad (۶)$$

$$\sin x > 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{9}{40} \quad (۷)$$

$$\cos x < 0, \quad \cot x = \frac{a}{b} \quad (۸)$$

و در هر یک از این حالتها بگوئید تیرکمان های  $x$  در چه بخشی از پیرامون دایره مثلثی است.  
و از تقسیم کردن و طرف بستگی (۱۱) بر  $\cos^2 x$  نتیجه میشود:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و یا نابرابرستگی (۵)

(۲۱)

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

همچنین از تقسیم کردن و طرف (۱۱) بر  $\sin^2 x$  این نتیجه بدست میآید:

(۲۲)

$$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

وززش

درستی نتایجهای زیر را بررسی نمایید:

$$\cos a \cdot \operatorname{tg} a = \sin a \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \quad (۲)$$

$$\operatorname{tg} x \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \quad (r)$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (f)$$

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x} \quad (d)$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \quad (e)$$

$$(\sin x + \cos x)(\operatorname{tg} x + \cot x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \quad (v)$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} + \operatorname{tg}^2 x \quad (A)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin y}{1 + \sin y}} = \frac{1}{\cos y} - \operatorname{tg} y \quad (\cos y > 0) \quad (9)$$

$$\frac{1 + \sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 - \sin a} \quad (10)$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = 1 - \sin^2 a - 1 \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} a + \cot a = \frac{1}{\cos a \cdot \sin a} \quad (12)$$

$$(x \sin a + y \cos a)^2 + (x \cos a - y \sin a)^2 = x^2 + y^2 \quad (13)$$

$$1 - \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin^2 a} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x \quad (15)$$

$$(1 + \sin y)(1 + \cos y) = (1 + \sin y + \cos y)^2 \quad (16)$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\cot a - 1}{\cot a + 1} \quad (17)$$

$$\cos x = \frac{\pm \cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad (18)$$



$$\sin x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\pm \sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad (20)$$

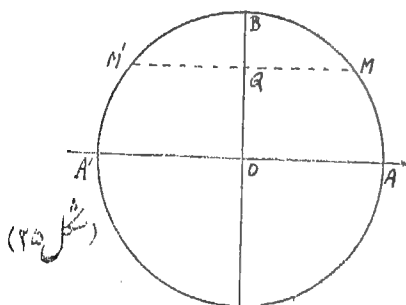
$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = \cot^2 x - \operatorname{tg}^2 x \quad (21)$$

(۲۲) عبارت  $\sin x + \cos x$  را بحسب  $\cos x$  تنها بنویسید.

(۲۳) عبارت  $\frac{1 + \cot^2 x}{\sin x}$  را بحسب  $\sin x$  بنویسید.

۲۹- بستگی میان خط‌های مثلثاتی برحی از کمانها (یا گوشه‌ها)

الف- کمانهای مکمل - اگر  $AM$  و  $AM'$  دو کمانی باشند که تیر بر دود



(شکل ۲۵)

A و ته آنها M و M' طوری

باشند که زه  $MM'$  موازی

قطر OA باشد (شکل ۲۵)

می‌توان اندازه جبری همه

کمانهای  $AM$  و  $AM'$  را باین صورت نوشت (شماره ۲۵ مسئله نخست):

$$\widehat{AM} = a + R\epsilon$$

$$\widehat{AM'} = \frac{c}{r} - a + R'\epsilon$$

زیر آن فرض سینک که یکی از اندازه‌های  $\widehat{AM}$  برابر  $a$  باشد یکی از اندازه‌های  $\widehat{AM'}$

$\widehat{AM'}$  برابر  $a - \frac{c}{r}$  است (دویش دوم شماره ۲۱)



کامل دارای یک سینوس میباشند یعنی

$$\sin x = \sin [(2K+1)\pi - x]$$

و همچنین دیده میشود که سینوس متمم دوگان مکمل دو عدد قرینه میباشند

$$\cos x = -\cos [(2K+1)\pi - x]$$

و نیز می بینیم  $\overline{AT}$  و  $\overline{AT'}$  دو عدد قرینه اند یعنی

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} [(2K+1)\pi - x]$$

و همچنین  $\overline{BS} = -\overline{BS'}$  یعنی

$$\cot x = -\cot [(2K+1)\pi - x]$$

اگر مجموع این بستگیا  $K$  را صفر بگیریم بستگیا یی را خواهیم داشت:

$$(۲۳) \left\{ \begin{array}{l} \sin (\pi - x) = \sin x \\ \cos (\pi - x) = -\cos x \\ \operatorname{tg} (\pi - x) = -\operatorname{tg} x \\ \cot (\pi - x) = -\cot x \end{array} \right.$$

خلاصه اینکه دوگان مکمل دارای یک سینوس میباشند و صورت یکدیگر  
پروازشای مثلثاتی آن دو متضاد یکدیگرند.

تعبیر - در جدولهای خطای مثلثاتی که یکی از آنها در آخر کتابست معمولاً

خطای مثلثاتی کمانهای گوشه های از  $۹۰^{\circ}$  تا  $۹۰^{\circ}$  نوشته شده است ولی اگر اندازه گوشه یا کمان منفی باشد و یا اگر از  $۹۰^{\circ}$  بزرگتر باشد برای خطای مثلثاتی آن جدول مخصوص نیست باید از همان جدولها استفاده کرد.

از روی نتیجه ای که برای دو کمان مکمل بدست آوردیم بویژه میتوان خطای مثلثاتی کمانهای گوشه های از  $۹۰^{\circ}$  تا  $۱۸۰^{\circ}$  را هم از روی جدول پیدا کرد زیرا قدرقت خطای مثلثاتی سهم نام دو کمان مکمل یکی است.  
مثلاً اگر بخواهیم خطای مثلثاتی  $۱۳۱^{\circ}$  را پیدا کنیم چون

$$۱۳۱^{\circ} = ۱۸۰^{\circ} - ۴۹^{\circ}$$

کافیت خطای مثلثاتی  $۴۹^{\circ}$  را از روی جدول پیدا کرده سپس از روی دستورهای (۲۳) خطای مثلثاتی  $۱۳۱^{\circ}$  را بنویسیم:

$$\sin ۴۹^{\circ} = ۰.۷۵۴۷ \quad \cos ۴۹^{\circ} = ۰.۶۶۵۶۱ \quad \tan ۴۹^{\circ} = ۱.۱۵۰۴ \quad \cot ۴۹^{\circ} = ۰.۸۶۹۲$$

$$\sin ۱۳۱^{\circ} = \sin ۴۹^{\circ} = ۰.۷۵۴۷ \quad \text{پس}$$

$$\cos ۱۳۱^{\circ} = -\cos ۴۹^{\circ} = -۰.۶۶۵۶۱$$

$$\lg ۱۳۱^{\circ} = -\lg ۴۹^{\circ} = -۱.۱۵۰۴$$

$$\cot ۱۳۱^{\circ} = -\cot ۴۹^{\circ} = -۰.۸۶۹۲$$

و نرزش - خطای مثلثاتی کمانهای زیر را بدست آورید:

۱۲۲° ۲۰'

۱۱۵° ۱۸'

۹۳° ۲۷'

۱۶۳° ۵۰'

۱۵۰°

۱۳۵°

ب- گمانهای مترسینه - اگر  $AM$  و  $AM'$  دو گمانی باشند که مرکز آنها در  $A$  و به آن نسبت به قطر  $OA$  قرینه باشند آن دو گمان را قرینه بهم خوانند (شکل ۲۷) و میتوان اندازه جبری همه گمانهای  $AM$  و  $AM'$  را تعیین چنین نوشت:

$$\widehat{AM} = a + k c$$

$$\widehat{AM}' = -a + k' c$$

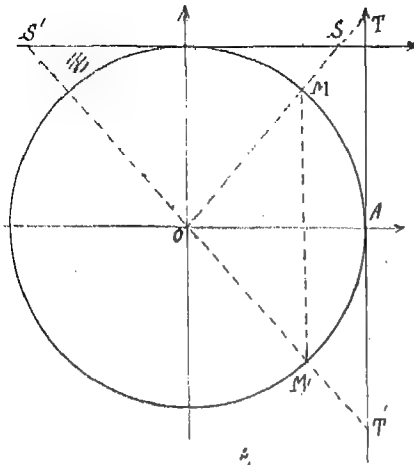
پس اگر اندازه یکی از گمانهای  $AM$  را برابر اندازه یکی از گمانهای  $AM'$  بنویسیم خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} + \widehat{AM}' = (k + k') c$$

یعنی مجموع هر دو گمان قرینه مضرب درستی است از پیرامون و مرکز و درش - دارون این قضیه را ثابت کنید.

پس اگر اندازه گمانی مانند  $AM$  به حسب رادیان  $x$  باشد و  $\widehat{AM}'$  اندازه قرینه آن باشد خواهیم داشت:

$$\widehat{AM}' = 2k\pi - x$$



(شکل ۲۷)

این جا هم از روی  
شکل دیده میشود که دو  
کمان قرنیۀ دارای  
یک سینوس متمم بوده  
ولی دیگر بر دایرۀهای  
مشکلاتی آنها قرنیۀ هم  
میشوند

$$\sin (2K\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos (2K\pi - x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg} (2K\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cot} (2K\pi - x) = -\operatorname{cot} x$$

اگر بخصوص در این بستگیها را صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$(۲۴) \begin{cases} \sin (-x) = -\sin x \\ \cos (-x) = \cos x \\ \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{cot} (-x) = -\operatorname{cot} x \end{cases}$$

تبصره - از روی دستنوی (۲۴) میتوان بکلی جدول خطای مثلثاتی نوشته  
یا کائنهای منفی را بدست آورد مثلاً

$$\sin (-۴۹^{\circ}) = -\sin ۴۹^{\circ} = -.۷۵۴۷$$

ورزش

۱- برابرهای هر یک از خطای مثلثاتی زیر را بحسب خط مثلثاتی گوشه قرینه بنویسید

$$\sin (-۴۷^{\circ}) \quad (۳) \quad \operatorname{tg} (-۶۱) \quad (۲) \quad \cos (-۴۳^{\circ}) \quad (۱)$$

$$\operatorname{tg} (۵-۶) \quad (۶) \quad \operatorname{tg} ۴۹^{\circ} \quad (۵) \quad \cot (-۱۵) \quad (۴)$$

$$\sin (۶-\pi) \quad (۸) \quad \cos (\alpha-\frac{\pi}{4}) \quad (۷)$$

۲- اندازه عددی خطای مثلثاتی زیر را بنویسید:

$$\operatorname{tg} (-۶۰) \quad (۳) \quad \cot (-۴۵) \quad (۲) \quad \cos (-۳۰) \quad (۱)$$

$$\sin (-۴۵) \quad (۶) \quad \operatorname{tg} (-۹۰) \quad (۵) \quad \sin (-۶۰) \quad (۴)$$

$$\operatorname{tg} (-۱۵۰) \quad (۹) \quad \cos (-۱۳۵) \quad (۸) \quad \sin (-۱۲۰) \quad (۷)$$

۳- اندازه عددی هر یک از عبارت های زیر را حساب کنید:

$$(۱) \quad \operatorname{tg} (-۶۰) \times \sin (-۳۰) : \sin ۶۰$$

$$(۲) \quad \sin ۹۰ \times \sin (-۹۰) : \operatorname{tg} (-۴۵)$$

$$(۳) \quad \sin^2 (-۴۵) : \sin (-۴۵) \times \cos (-۶۰)$$

$$(۴) \sin^2(-۴۵^\circ) : \cos^2(-۴۵^\circ) + \operatorname{tg}(-۴۵^\circ)$$

(۵)  $\sin(-۹۰^\circ) - \operatorname{tg}^2(۱۲۰^\circ) + \frac{1}{\cos^2(۱۲۰^\circ)}$   
 چ - کانهاییکه تیه آنها نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینه اند -  
 اگر  $AM$  و  $AM'$  دو کانی باشند که سر هر دو در  $A$  و تیه آنها  $M$  و  $M'$  قرینه  
 یکدیگر باشند نسبت به مرکز دایره مثلثاتی (شکل ۲۸) میتوان اندازه جبری همه  
 کانهای  $AM$  و  $AM'$  را چنین نوشت:

$$\widehat{AM} = a + Kc$$

$$\widehat{AM}' = -\frac{c}{r} + a + K'c$$

زیرا یکی از اندازه های کان  $AM$  برابر  $a + \frac{c}{r}$  است  
 اگر یکی از کانهای  $AM'$  را از یکی از کانهای  $AM$  کم کنیم خواهیم داشت:

$\widehat{AM} - \widehat{AM}' = (2K - 2K' - 1) \frac{c}{r}$   
 یعنی هرگاه دو کان دارای یک سر باشند و تیه آنها نسبت به مرکز  
 دایره مثلثاتی قرینه به یکدیگر باشند تفاضل آنها مضرب تائی است  
 از نیمه پیرامون (از پیرامون  $2K - 2K' - 1$  هر چه باشد عدد  
 و رانش - و درون این قضیه اثبات کنیم

پس اگر  $x$  را دایان اندازه کانی مانند  $AM$  باشد اندازه  $AM'$  چنین خواهد شد:







کمان  $AM$  خواهد شد  $\frac{c}{4} - a$  و بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{AM} = a + k \times c$$

$$\overline{AM}' = \frac{c}{4} - a + k' \times c$$

$$\overline{AM} + \overline{AM}' = \frac{c}{4} + (k + k') \cdot c \quad \text{پس}$$

و یا اگر کمان را رادیان بگیریم

$$\overline{AM} + \overline{AM}' = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

که یک عدد رسی است.

یعنی مجموع دو کمان متمم برابر است با مجموع یک چهارم پیرامون دایره

و یک دور پیرامون.

که در آن یک عدد رسی مثبت یا منفی یا صفر.

وزرش ۱- در شکل ۲۹ و  $M$  و  $M'$  را در بخش اول گرفتیم بررسی کنید که اگر

هر دو در بخش سوم باشند و یا یکی در بخش دوم و دیگری در بخش چهارم (شکل ۳۰)

در نتیجه ای که بدست آوردیم تغییری رخ نخواهد داد.

وزرش ۲- وارزون این قضیه اثبات کنید.

پس اگر  $x$  رادیان اندازه یکی از کمانهای  $AM$  باشد اندازه کمانهای

$$\overline{AM}' = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - x \quad \text{چنین است:}$$

از زوئی شکل های بالای بسینیم که  $OP$  قرینه  $OQ$  است نسبت به نیمساز  $D$  و  $OQ$  قرینه  $OP$  است نسبت به همان خط - پس قدر مطلق سینوس متمم کمانهای  $AM$  برابر قدر مطلق سینوس کمانهای  $AM$  است و همچنین قدر مطلق سینوس  $AM$  برابر قدر مطلق سینوس متمم  $AM$  میباشد - بعلاوه در شکل های مختلف دیده میشود که نشانه این پروازها نیز یکسبت - یعنی هم از حیث قدر مطلق و هم از حیث نشانه خواهیم داشت

$$\sin \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi - x \right) = \cos x$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi - x \right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi - x \right) = \cot x$$

$$\cot \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi - x \right) = \operatorname{tg} x$$

و بنابراین

این دو استناد اخیر را از زوئی شکل بسینیم میتوان بدست آورد. اگر بخصوص در این بسینیم  $R$  را صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$(A) \quad \begin{cases} \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \cos x \\ \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \sin x \\ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \cot x \\ \cot \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

که همان تحت دمای (۸) از بخش نخست کتابست (شماره ۸) که می‌پسینم  
و مورد بهر مکان (یگوشه) درست است خواه اندازه مکان میان صفر و یک چهارم  
پیرامون باشد خواه نباشد

هر مکان ثانی که تفال آنها برابر یک چهارم پیرامون است - اگر  
در اتحاد دمای (۸)  $x$  را به  $x$  - مبدل کنیم خواهیم داشت :

$$\sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \cos (-x)$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \sin (-x)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \cot (-x)$$

$$\cot \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \operatorname{tg} (-x)$$

و یا بموجب بستگی های (۲۴)

$$(۲۶) \quad \begin{cases} \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \cos x \\ \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = -\sin x \\ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = -\cot x \\ \cot \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = -\operatorname{tg} x \end{cases}$$

تبصره - میتوان نیز برای بدست آوردن پردازشهای مثلثاتی  $\frac{\pi}{4} + x$

از رابطه صورت  $(-x) - \frac{\pi}{4}$  نوشت دستورهای (۸) و (۲۴) را بکار

برداشت

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] = \cos(-x) = \cos x$$

از روی شکل هم میتوان همین نتیجه رسید.

۳- دستورهای (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) را میتوان بطور

خلاصه چنین گرفت:

اگر  $x$  را به مضرب حقیقی از  $۹۰$  بفرماییم یا از آن کم کنیم یا بدست میآید که پردازشهای آن بهمانند پردازشهای خود  $x$  و اگر  $x$  را به مضرب حقیقی از  $۹۰$  بفرماییم یا از آن کم کنیم پردازشهای مثلثاتی همان حاصل همان پردازشهای متمم  $x$  میباشد.

و برای بدست آوردن نشانه پردازشهای متجه کافیت به فرض کرد که اندازه  $x$  میان  $۰$  و  $۹۰$  است و دید آیا جای تکیه همان حاصل در چه بخشی از پیرامون دایره مثلثاتیت.

مثلاً

$$\cos(۲۷۰^\circ - x) = \cos(۳ \times ۹۰^\circ - x) = -\sin x$$

$$\sin(-۱۸۰^\circ + x) = \sin(-۲ \times ۹۰^\circ + x) = -\sin x$$

وزرش

۱- بوسیله دایره مثلثاتی با فرض اینکه  $\alpha$  گوشه تند باشد - هر یک از عبارتهای زیر را  
 به حسب خطهای مثلثاتی  $\alpha$  حساب کنید و درستی نتیجه را از روی دستورهای بلاویه بگفت  
 شماره ۳۰ بررسی نمایند:

$$\cot(54^\circ + \alpha); \sin(27^\circ + \alpha); \text{tg}(45^\circ - \alpha); \cos(18^\circ - \alpha)$$

$$\sin(-27^\circ + \alpha); \cos(27^\circ - \alpha)$$

۲- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\cot 12^\circ \times \text{tg} 45^\circ \times \sin 6^\circ$$

$$\cot 135^\circ \times \text{tg} 135^\circ \times \sin 6^\circ$$

$$\cot 45^\circ + \text{tg} 135^\circ - \cos 18^\circ$$

$$(\text{tg} 12^\circ + \text{tg} 135^\circ)(\text{tg} 12^\circ - \text{tg} 135^\circ)$$

۳- از روی یک دایره مثلثاتی برابریهای زیر را ثابت کنید:

$$\sin 12^\circ = \cos 3^\circ = -\sin(-6^\circ)$$

$$\sin 115^\circ = \cos(-25^\circ) = \cos 25^\circ$$

$$\sin(-15^\circ) = \sin 195^\circ = -\cos 15^\circ$$

$$\text{tg}(-6^\circ) = -\text{tg} 6^\circ = \text{tg} 12^\circ$$

۴- بگفت دایره مثلثاتی و نیز از روی دستورهای بالا خطهای مثلثاتی زیر را مختص

- ۱۰۷ -

نظای مثلثاتی نوشته شده است آورد و سپس آنها را حساب کنید. (اگر لازم باشد از روی جدول):

$$\operatorname{tg} 42^\circ 24' ; \sin (-36^\circ 4') ; \cos 21^\circ 4'$$

$$\cos (-21^\circ 4') ; \cos (-10^\circ) ; \operatorname{tg} (-22^\circ)$$

$$\sin (-51^\circ) ; \cos (-52^\circ) ; \operatorname{tg} 11^\circ 4'$$

۵- ازستی برابریهای زیر را بررسی نمایید:

$$\operatorname{tg} 30^\circ \times \sin 21^\circ = -\cos 21^\circ$$

$$\cos 24^\circ \times \cos 22^\circ = \cos 21^\circ \times \cos 3^\circ$$

$$\operatorname{tg} 21^\circ \times \cos 23^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \times \cos 15^\circ$$

$$\sin 22^\circ \times \cos 21^\circ + \cos 31^\circ \times \sin 2^\circ = 0$$

$$\sin 21^\circ \times \operatorname{tg} 22^\circ + \cot 21^\circ \times \cos 2^\circ = -1$$

$$\cos 51^\circ \times \sin 51^\circ = \sin 33^\circ \times \cos 39^\circ$$

$$\frac{1}{\sin(27^\circ - a)} + \frac{\sin(11^\circ - a)}{\sin(27^\circ - a)} \cdot \operatorname{tg}(9^\circ + a) = 1 - \frac{1}{\cos(-a)}$$

$$\frac{\cos(11^\circ + a)}{\cos(-a)} + \frac{2\sin(-a)}{\cos(9^\circ + a)} = \frac{\cot(-a)}{\operatorname{tg}(27^\circ + a)} = 0$$

۶- از برای  $a + b + c = 11^\circ$  برابریهای زیر را اثبات کنید:

$$\sin \frac{b+c}{2} = \cos \frac{a}{2}$$

$$\sin \frac{b}{2} = \cos \frac{a+c}{2}$$



- ۱۰۸ -

$$\sin a = \sin (b + c)$$

$$\cos a = -\cos (b + c)$$

$$\operatorname{tg} a = -\operatorname{tg} (b + c)$$

$$\sin a = -\sin (2a + b + c)$$

$$\cos a = -\cos (2a + b + c)$$

$$\cos \frac{b-c}{2} = \sin \frac{a+2b}{2} = \sin \frac{a+2c}{2}$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = -\cos \frac{2a+c}{2} = \cos \frac{c+2b}{2}$$

$$\cos b = \sin \frac{a+2b+c}{2}$$

۳۱- از آنچه در شماره های ۲۹ و ۳۰ گفتیم همچنین از ورزشگاه

چنین نتیجه میگیریم که میتوان پروازهای مثلثاتی بر کان (یا هر گوشه) را برگزید

که خطهای مثلثاتی گمانهای از تانها را میدهد بدست آورد.

ورزش

خطای مثلثاتی گوشه های زیر احصا کنید:

$$100^\circ ; -23^\circ ; (945 \quad 22)$$

$$521^\circ 42' ; 63^\circ ; 47^\circ ; 751^\circ ; 145^\circ$$

$$(57^\circ 15') ; -139^\circ ; -224^\circ ; 315^\circ$$

# بخش سوم

## تصویر

۳۲- بردار - بردار پار خطی را گویند که سر و ته آن معین باشد.  
مثلاً از پار خطی که دو نقطه  $A$  و  $B$  را بهمی پیوند دهد بردار پیدایش می‌کند.  
سپهر آن  $A$  و ته آن  $B$  است آن را بردار  $AB$  خواند چنین بنویسند.

$\overrightarrow{AB}$

دیگر آنکه سپهر آن در  $B$  و ته آن در  $A$  باشد و آن بردار  $BA$  خوانده میشود و بنویسند

$\overrightarrow{BA}$

سوی بردار - آن سویی است که در آن سویت متحرک برای پیوندن پار خط  
از طرف سپهر بردار بسوی ته آن حرکت میکند مثلاً سویی  $\overrightarrow{AB}$  (بردار  $AB$ )  
سوی حرکت از  $A$  است بطرف  $B$  و سویی  $\overrightarrow{BA}$  سوی حرکت از  $B$  طرف

$A$  است

راستای بردار - راستای هر خط مسر و پار خط  $AB$  را راستای

بردار  $AB$  و یا راستای بردار  $BA$  میخوانیم.

نمایش بدهند سویی یک بردار -  $\overrightarrow{AB}$  را چنین نمایش بدهند:



یعنی در تیر بردار تیر سی میگذارد. این تیر روی بردار  $AM$  میماند.

اندازه بردار  $AB$  عبارتست از اندازه درازی آن (با یک واحد از) برای اینکه بردار  $AB$  علامتین باشد کافیت که یا سه مرتبه آن بردار داده شود (در صورت راستا و دو اندازه آن هم معین است) و یا اینکه سه برابر است و اندازه آن در دست باشد (در صورت تیر بردار نیز معین است).

۳۲- اندازه جبری بردار - هرگاه روی خطی که بردار روی آن است (دیوار) یک خط هموار با راستای بردار، آسه ای بگیریم مانند  $xx'$  بنا بر آنکه سوی بردار مانند سوی این آسه باشد و یا وارونه آن اندازه جبری بردار مثبت یا منفی خواهد بود و مقدار مطلق آن برابرست با درازی بردار (اندازه مطلق بردار). [پس هر جا گفت که از اندازه جبری بردار میماند یا ضمیمه آسه ای هم در کار است که راستای آن آسه را روی بردار است یا موازی آن]



(شکل ۳۱)

مثلاً در شکل ۳۱ که درازی  $AB$  برابر سه یکده دراز است و درازی  $CD$  برابر دو یکده است اندازه جبری بردارهای  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  به ترتیب  $+۳$  و  $+۲$  باشد و آن را چنین می نویسیم

(اندازه جبری بردار  $AB$ )  $\overline{AB} = 0 + 3$

$\overline{CD} = -2$

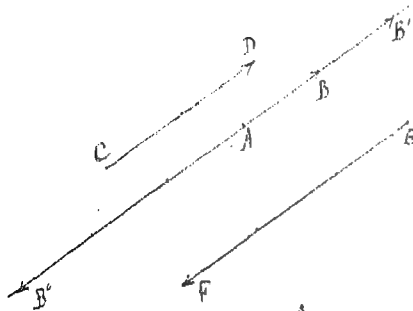
و یا روشن است که در همه حال  $\overline{AB} = -\overline{BA}$

(۲۷)

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

۲۴- ضرب یک بردار در یک عدد جبری - اگر بردار  $\vec{AB} = \vec{u}$  را داشته باشیم داده شده باشد (شکل ۳۲) غرض از  $2\vec{u}$  و یا  $2\overline{AB}$  برداریست که از همان راستای  $AB$  درازایش دو برابر درازای  $\vec{u}$  بوده سویش از  $A$  به  $B$  باشد:

$2\vec{u} = \vec{AB}' = \vec{CD}$



(شکل ۳۲)

و هرگاه بگویم  $3\vec{u}$  - و یا  $3\overline{AB}$  - غرض برداریست در همان راستای  $AB$  که درازایش سه برابر درازای  $\vec{AB}$  بوده سویش از  $A$  به  $B$  باشد.

$-3\vec{u} = \vec{AB}'' = \vec{EF}$

بطور کلی غرض از  $m\vec{v}$  بردار است در همان استای  $\vec{v}$  که درازیش  
برابر حاصل ضرب درازای  $\vec{v}$  در قدر مطلق عدد جبری  $m$  بوده  
سویش با سوی  $\vec{v}$  یکی است اگر  $m$  مثبت باشد و وارونه سوی  
 $\vec{v}$  است هرگاه  $m$  منفی باشد.

۳۵- بردار یکه یک است - هرگاه روی آن  $x$  برداری بگیریم تا  
آنکه اندازه جبری آن ۱+ باشد آن را بردار یکه آن  $x$  می نامیم - روشن است  
که اگر  $\vec{e}$  را داشته باشیم آنهم کاملاً مشخص است (از حیث راستا و سو)  
بنابراین هرگاه اندازه جبری یک بردار روی یک است که بردار یکه آن  $\vec{e}$  است  
 $x$  باشد و اگر سر آن بردار هم داده شده باشد می توان آن بردار را  $x\vec{e}$  نوشت (۳۴)  
وزرش

۱- دو نقطه  $A$  و  $B$  بدخواه اگر فاصله برداری  $\vec{AB}$  و  $\frac{1}{r}\vec{AB}$  و  
 $-\vec{AB}$  و  $-\frac{1}{r}\vec{AB}$  را نمایش بدهد.

۲- اگر  $\vec{e} = \frac{\vec{AB}}{r}$  و  $\vec{f} = -\frac{1}{r}\vec{AB}$  باشد اندازه جبری بردار  
 $\vec{AB}$  چهار برابر دیگر از وزرش (۱) را روی دو استای یک بردار یکه آنها برتیب  $\vec{e}$  و  
 $\vec{f}$  باشد بست آید پس بر یک این بردار را بصورت حال ضرب  $\vec{e}$  (یا  $\vec{f}$ ) بگیرد  
جبری نویسد.



بتکلیست :

(قضیه شال)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

و یا

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

یا

(۲۸)

$$\overline{AB} = b - a$$

یعنی اندازه جبری یک بردار (زوی یک آسه) برابرست با تفاضل میان ابعاس آن و ابعاس سران .

وزرش - اندازه جبری بردارهای  $\overrightarrow{MN}$  و  $\overrightarrow{NP}$  و  $\overrightarrow{PM}$  را که ابعاسی سر و ته آنها در وزرش پیش داده شده) بدست آورید و ثابت کنید که

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = 0$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MO} = 0$$

و نیز

نتیجه این وزرش را عمومیت دهید .

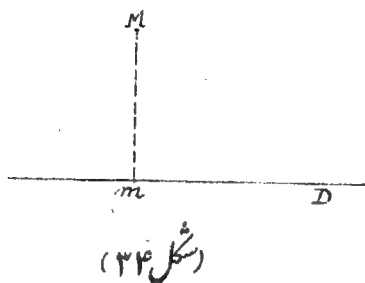
و نیز درستی اتحاد زیر را بررسی کنید :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

۳۸ - تصویر راست گذریک نقطه بر زوی یک خط - بر گاه خط  $D$

و نقطه  $M$  داده شده باشد تصویر راست گذر  $M$  روی خط  $D$  پایه ستونیت (عمود) که

فروآید. در شکل ۳۴ نقطه  $m$  تصویر راست گذر  $M$  است



(شکل ۳۴)

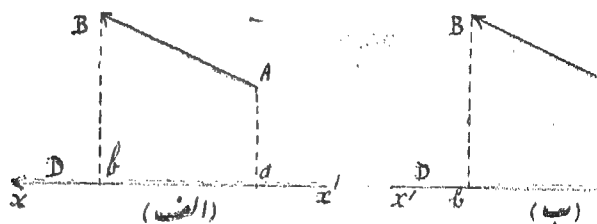
مانند  $M$  روی خط

یعنی است  $li$

$m$  از  $D$  میتواند

پشامی باشد.

دیر است گذر یک بردار روی محیط و روی یک است  
خط  $D$  برداری است مانند  $\alpha$  که سر آن تصویر  $B$  بر  
ر  $A$  و ته آن تصویر  $B$  بردار  $AB$  یعنی تصویر  $B$  باشد (شکل ۳۵)



(الف)

(ب)

(شکل ۳۵)

$D$  آسای بگیریم مانند  $x'$  در صورت انداز جبری  $\alpha$   
 $AB$  روی آسای  $x'$  میخوانیم. پس در حقیقت تصویر یک بردار روی  
ست از انداز جبری تصویر آن بردار روی خطی که بر آن است



منطبق است (یا زوی راستای آنست)

مثلاً در (شکل ۳۵ الف) تصویر  $\overrightarrow{AB}$  روی آنست  $x \cdot x$  عددی است مثبت

و در (شکل ۳۵ ب)  $\overrightarrow{AB} = -x \cdot x$  عددی است منفی

۴- آبسیس و اُردنه در یک نامن - برای تعیین کردن جای هر نقطه ناند

$M$  در یک نامن معمولاً در آن نامن نقطه ای ناند  $O$  بدخواه میگیرند بطوریکه جایش

معلوم باشد و از آن نقطه دو آنست  $x \cdot O$  و  $O \cdot y$  عمود بر یکدیگر میگذرانند بطوریکه

توان سومی مثبت  $O \cdot x$  را پس از یک گردش  $\frac{\pi}{4} +$  روی نوی مثبت

$$O \cdot y \text{ آورد؛ } (O \cdot x, O \cdot y) = + \frac{\pi}{4}$$

آنست  $x \cdot O$  را آنست  $x$  یا آبسیس و آنست  $O \cdot y$  را آنست  $y$  یا اُردنه و  $O$  را

خاستگاه این دو آنست و یا خاستگاه نامن نینامند (ممکن است خاستگاه دو آنست یکی

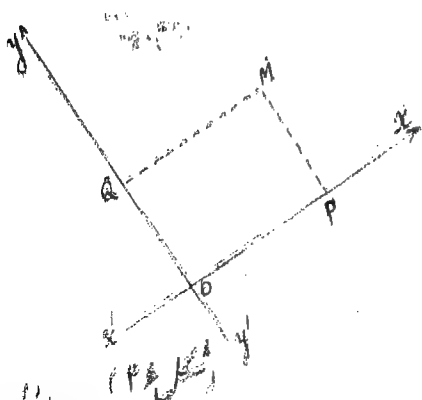
از آن نادر  $O$  نباشد) (شکل ۳۶)

حال اگر تصویر راست گذر بردار

$\overrightarrow{OM}$  روی آنست  $x$  و آنست  $y$

به ترتیب  $\overrightarrow{OP}$  و  $\overrightarrow{OQ}$  باشد

(یعنی تصویر بردار  $\overrightarrow{OM}$  روی آنست



$x \cdot O$  را  $x$  یا آبسیس نقطه  $M$  و  $\overrightarrow{OQ}$  (تصویر  $\overrightarrow{OM}$  روی  $O \cdot y$ ) را  $y$  یا اُردنه



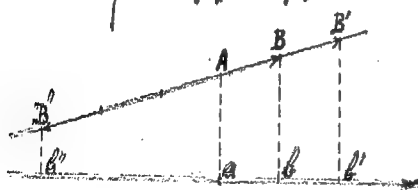
$\alpha$  آنکه  $\vec{OM}$  بردار یکد آنست (شکل ۲۲) بنابرین  
 سینوس متمم گوشه میان دو آسه برابر است با تصویر بردار یکد یکی  
 از آن دو آسه روی آسه دیگر

$$\cos \alpha = \cos (O\vec{M}, O\vec{x}) = \cos (O\vec{x}, O\vec{M})$$

$$\cos \alpha = \cos (O\vec{A}, O\vec{y})$$

[این نکته د نظر گرفته شود که اگر چنانچه دو گوشه  $(O\vec{x}, O\vec{y})$  و  $(O\vec{y}, O\vec{x})$  یکی نیست ولی سینوس متمم این دو گوشه یکی است (دستورهای ۲۳)]

۴۲- اندازه جبری تصویر یک بردار - از روی یک شکل دین است  
 که هرگاه برداری را در یک عدد جبری ضرب (و یا تقسیم) کنیم اندازه جبری تصویر  
 آن بردار بر روی یک آسه نیز در آن عدد ضرب (و یا بر آن تقسیم) میشود



مثلاً اگر  $\vec{AB}$  دو برابر  $\vec{AB}$  باشد  
 آنگاه نیز دو برابر  $\vec{ab}$  است

(شکل ۲۸)

(شکل ۳۱)

و همچنین اگر  $\vec{AB}$  برابر  $\frac{1}{3} \vec{AB}$  باشد آنگاه نیز برابر  $\frac{1}{3} \vec{ab}$  خواهد بود  
 حال اگر فرض کنیم اندازه جبری بردار  $\vec{AB}$  (شماره ۲۴) روی آسه  $\vec{Ox}$  قرار  
 دهد و بردار یکد این آسه  $\vec{OI}$  باشد خواهیم داشت (شماره ۲۵):

$$\vec{AB} = m \vec{OI}$$

پس بنا بر آنچه گفتیم تصویر  $\vec{AB}$  روی یک آسه مانند  $x'ox$  عبارتست از  $m$  برابر تصویر  $\vec{OI}$  روی  $x'ox$  ولی بنا بر شمار پیش تصویر  $\vec{OI}$  روی  $x'ox$  برابر است با سینوس متمم گوشه میان دو آسه  $z'oz$  پس:

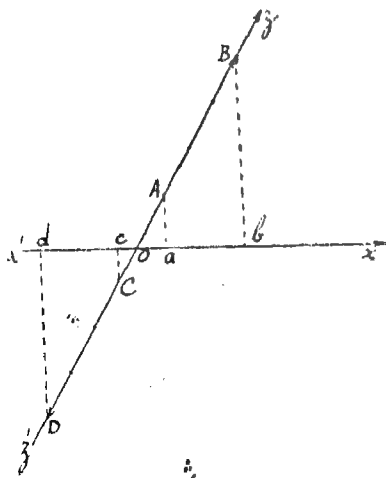
قضیه - تصویر یک بردار روی یک آسه برابر است با حاصل ضرب اندازه جبری بردار در سینوس متمم گوشه میان آسه یک بردار روی آسه است. تصویر مثلاً اگر گوشه میان آسه تصویر  $x'ox$  و آسه  $z'oz$  که بردار روی آسه است  $60^\circ$  باشد  $[\angle(x'ox, z'oz) = 60^\circ]$  و اگر بردار  $z'oz$  از آسه  $z'oz$  متمم

روی  $z'oz$  بگیریم کلی  $\vec{AB}$  بقسمیکه  $\vec{AB} = +3$

و دیگر  $\vec{CD}$  بقسمیکه

$$\vec{CD} = -3$$

(شکل ۳۹) خواهیم داشت:



(شکل ۳۹)

$$ab = \vec{AB} \cos(\angle x'ox, z'oz) = +3 \cos 60^\circ$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$cd = \vec{CD} \cos(\angle x'ox, z'oz) = -3 \cos 60^\circ$$

$$= -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

اگر در همین شکل سوی مثبت آسه  $\vec{Ox}$  را از  $\vec{Oy}$  بسوی  $\vec{Oz}$  بگردانیم  
داشت:

$$\overline{CD} = +3 ; \overline{AB} = -3 ; (\vec{Ox}, \vec{Oz}') = 60^\circ = 18^\circ$$

$$\cos(\vec{Ox}, \vec{Oz}') = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{ab} = \overline{AB} \cos(\vec{Ox}, \vec{Oz}') = -3 \times -\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{پس}$$

$$\overline{cd} = \overline{CD} \cos(\vec{Ox}, \vec{Oz}') = +3 \times -\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

می بینیم (چنانکه پیش منی بهم میشد) که انداز و جبری تصویر یک بردار روی یک  
آسه بنگلی بسوی آسه ای که روی بردار یکسایم ندارد (زیرا اگر سوی  $\vec{Oz}$  تغییر کند  
هم نشانه انداز و جبری بردار و هم نشانه سینوس سهم گوشه دو آسه تغییر میکند  
پس نشانه حاصل ضرب آنها تغییر نخواهد کرد)

و زرش - در مان و آسه  $\vec{x}'\vec{Ox}$  و  $\vec{y}'\vec{Oy}$  (که عمود بر یکدیگرند) نقطه ای پیدا

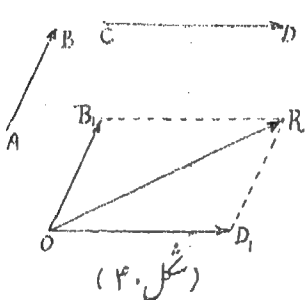
$$\text{بیابید:} \quad A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 + \frac{3}{2} \end{vmatrix} \quad C \begin{vmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} + \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

و تصویر راست گذر بردارهای  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  را روی دو آسه  $\vec{x}'\vec{Ox}$  و  $\vec{y}'\vec{Oy}$

معین کنید (بهم مستقیماً هم از روی شماره ۳۷ و هم از روی قضیه بالا)

۴۳- برآیند دو بردار - اگر نقطه ای و نخواهد ماند  $O$  و بردار  $\overrightarrow{OB}$  و

$\vec{OD}_1$  را برتریب هم و هم سوم و هم اندازه باد و بردار  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  بکشیم (شکل ۴۰) و اگر  $R$  تا بک چهارم هم و بری (متوازی الاضلاع) باشد که دو پهلوی



آن  $\vec{OB}_1$  و  $\vec{OD}_1$  باشد،

بنابر تعریف بردار  $\vec{OR}$  برانید

یا مجموع هندسی  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$

(و یا  $\vec{OB}_1$  و  $\vec{OD}_1$ ) نامیده شود.

۴۴- بردارهای همگت - بردارهای که هم و هم سوم اندازه باشند

همگت یکدیگر نامیده شوند. بنابرین در شکل ۴۰  $\vec{OB}_1$  همگت  $\vec{AB}$  است و  $\vec{CD}$  همگت  $\vec{OD}_1$ .

۴۵- تصویر دو بردار همگت - تصویرهای دو بردار همگت و یک

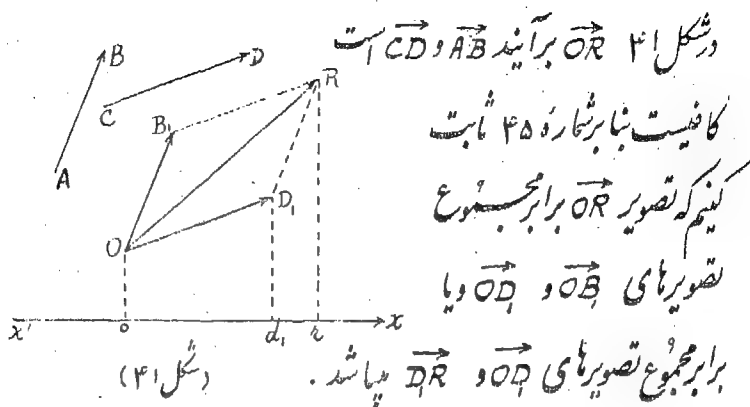
آسه برابرند (دو عدد جبری برابر)

و این قضیه نتیجه است از قضیه شماره ۴۲:

زیرا اگر روی دو بردار همگت دو آسه هم شو بکشیم هم اندازه جبری این بردار برابر میشود و هم سینوس متمم گوشه میان آسه تصویر و هر یک ازین دو آسه

۴۶- قضیه - تصویر برانید دو بردار روی یک آسه برابر است

با حاصل جمع جبری تصویرهای آن دو بردار روی همان آسه.



ولی اگر تصویرهای سه نقطه  $O$  و  $D_1$  و  $R$  برتیب  $o$  و  $d_1$  و  $c$  باشد تصویر بردارهای  $\vec{OD_1}$  و  $\vec{D_1R}$  و  $\vec{OR}$  برتیب  $\vec{od_1}$  و  $\vec{d_1c}$  و  $\vec{oc}$  خواهد بود و بنا بر قضیه شال (شماره ۲۷) خواهیم داشت:

$$\vec{oc} = \vec{od_1} + \vec{d_1c}$$

و یا  $(\text{تصویر } \vec{OR})_{x'x, o, c} = (\text{تصویر } \vec{OD_1})_{x'x, o, d_1} + (\text{تصویر } \vec{D_1R})_{x'x, d_1, c}$

و زرش

برای چند بردار  $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$  چنین بست یابیم که از نقطه دلخواهی ما  
 $O$  بردار  $\vec{OA_1}$  را بست با  $\vec{a_1}$  و از  $A_1$  بردار  $\vec{A_1A_2}$  را بست با  $\vec{a_2}$  و از  $A_2$  بردار  $\vec{A_2A_3}$  را بست با  $\vec{a_3}$  و از  $A_{n-1}$  بردار  $\vec{A_{n-1}A_n}$  را بست با  $\vec{a_n}$  می کشیم:  $\vec{OA_n}$  برآیند مطلوب است.

۱- قضیه شال را عمودیت دهید.

۲- قضیه ۴۰ را برای چند بردار عمودیت دهید.

۲- خط شکسته ایست  $ABCD$  دارای سه پهلو که درازای هر یک از پهلوهایی آن

$\alpha$  و گوشه خارجی این خط شکسته در یکی از رئوسهای آن  $\alpha$  میباشد:  $\alpha = (AB, BC)$   
و مرکز دایره مماسی این خط شکسته را  $O$  مینامیم:

الف - حساب کنید  $\cos \alpha$  و  $\alpha$

پرتو  $OA$

گوشه مرکزی  $\widehat{AOD}$

درازای  $AD$  و گوشه میان  $AB$  و  $AD$  را.

ب - بنا به تعریف برآیند بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  و  $\vec{CD}$  بردار  $\vec{AD}$  است. اگر

نتیجه ورزش (۲) را در مورد این سه بردار و برآیند آنها بکار ببریم و روی آن  $AB$  تصویر  
کنیم چه اتفاقی خواهیم رسید؟

۴- از روی نتیجه ورزش (۲) برابریهای زیر را ثابت کنید (دقت کنید!)

$$\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

(نیمه پیرامون یک پنج برنظم یا یک هشت برنظم را روی یکی از اضلاع تصویر کنید)

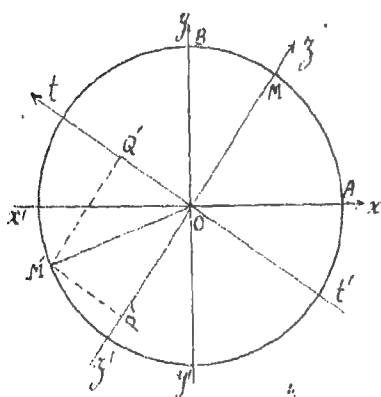


# بخش چهارم

پردازشهای مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان (یادآور گشته)

میخواهیم با داشتن پردازشهای مثلثاتی دو کمان  $\alpha$  و  $\beta$  پردازشهای مثلثاتی کمان  $(\alpha + \beta)$  و کمان  $(\alpha - \beta)$  را حساب کنیم.

۴۷- الف-  $\cos(\alpha + \beta)$ : فرض کنیم  $\overline{AM}$  برابر  $\alpha$  و  $\overline{MM'}$  برابر  $\beta$  باشد (شکل ۴۲) پس  $\overline{AMM'}$  برابر  $\alpha + \beta$  خواهد بود



(شکل ۴۲)

(بشترگوئیم کمی از اندازه‌های

$\overline{AMM'}$  برابر  $\alpha + \beta$  است)

و مقصود بدست آوردن

سینوس متمم کمان  $\overline{AMM'}$  است

از روی پردازشهای مثلثاتی

کمانهای  $\overline{AM}$  و  $\overline{MM'}$

آنه سینوس متمم آنه سینوس کمانهای  $\overline{AM}$  و  $\overline{AMM'}$  (که هر دو در A است)

عبارة اندازه  $x$  و  $y$  منطبق بر  $OA$  و  $OB$  یا  $oy$  و  $OB$ .

ن  $MM'$  این دو آینه به ترتیب عبارتند از  $oz$  (منطبق بر  $OM$ )

$$oz \text{ گوشه } + \frac{\pi}{4} + \text{میزان } + \frac{\pi}{4} = (OM, ot)$$

پس متمم دسیکوس گان  $MM'$  یا گان  $oz$  عبارتند از  $oz$  و  $oz'$

زیرای بردار  $OM'$  روی دو آینه  $oz$  و  $oz'$  (شماره ۴۱) میتوان

$OM$  را برآیند دو بردار  $OP$  و  $OQ$  گرفت (اندازه جبری  $OP$  روی

بر  $oz$   $\cos$  و اندازه جبری  $OQ$  روی  $oz'$   $\sin$  است)

بر  $OM'$  روی هر آینه برابر است با مجموع جبری تصویرهای دو بردار  $OP$

(شماره ۴۶)

پس  $(oz + oz')$   $\cos$  برابر است با تصویر بردار  $OM'$  روی آینه

(۴۱) پس میتوان گفت  $(oz + oz')$   $\cos$  برابر است با مجموع

ویرهای  $OP'$  و  $OQ'$  روی آینه  $ox$ :

$$\cos (a + b) = (\text{تصویر } OP')_{ox} + (\text{تصویر } OQ')_{ox}$$

نشیه ۴۲ تصویر  $OQ'$  روی  $ox$  برابر است با حاصل ضرب

ری  $OP$  روی  $oz$   $\sim$  (یعنی  $\cos$ ) دسیکوس متمم گوشه میان  $oz$

و  $ox$  (یعنی  $\cos a$ )

$$(\text{تصویر } OP')_{ox} = \cos b \times \cos a$$

پنجین تصویر  $\vec{OQ}$  روی  $xx$  برابر است با حاصل ضرب اندازه جبری  $\vec{OQ}$  روی  $tt$  (یعنی  $\sin \theta$ ) در سینوس متمم گوشه میان  $tt$  و  $xx$  ولی

$$\cos(\theta_x, \theta_t) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$(\vec{OQ})_{xx} = \sin \theta \times (-\sin \alpha)$$

پس

$$(۲۹) \quad \boxed{\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta}$$

بنابراین

ب- " $\cos(\alpha - \theta)$  و  $\sin(\alpha + \theta)$  و  $\sin(\alpha - \theta)$ "

می‌توان  $\cos(\alpha - \theta)$  و  $\sin(\alpha + \theta)$  و  $\sin(\alpha - \theta)$  را نیز مانند  $\cos(\alpha + \theta)$  بدست آورد. ولی آسان‌ترین است که آنها را از دستور (۲۹) بدست آوریم:

چون دستور (۲۹) درست است هر چه باشد  $\alpha$  و  $\theta$  (یعنی اتحاداً)

پس اگر بجای  $\theta$  مکان  $(-\theta)$  را بگذاریم خواهیم داشت:

$$\cos[\alpha + (-\theta)] = \cos \alpha \cos(-\theta) - \sin \alpha \sin(-\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \text{ و } \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ (دستور ۲۴)}$$

پس

$$(۳۱) \quad \boxed{\cos(\alpha - \theta) = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta}$$

برای بدست آوردن  $\sin(a+b)$  می‌توانیم بوسیله دستورهای ۸  
شماره ۲۹):

$$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

پس کیفیت در اتحاد ۳۰ بجای  $a$  بگذاریم  $\frac{\pi}{2} - a$ :

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

و یا چون (دستورهای ۲۳)  $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$  و  $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

پس

$$(۳۱) \quad \boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

و اگر در این اتحاد بجای  $b$  بگذاریم  $-b$  - خواهیم داشت:

$$(۳۲) \quad \boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

۷- " $\tan(a+b)$  و  $\tan(a-b)$ "

اگر دو طرف اتحاد (۳۱) را بر دو طرف اتحاد (۲۹) تقسیم بکنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

و اگر برضه نام و برضه شمار طرف دوم را بر  $\cos a \cdot \cos b$  تقسیم کنیم چنین خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}{1 - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$(۳۳) \quad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

و یا  
 (۳۰) بدست آوردن آسانتر نیست که در اتحاد (۳۳)  $\operatorname{tg} a$  را به  $\operatorname{tg} b$  تبدیل  
 (۳۱)  $\operatorname{tg}(a-b)$  را هم میتوان مانند  $\operatorname{tg}(a+b)$  از تقسیم کردن و طرف (۳۲) برداشت

$$(۳۴) \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

نمایم:  
 تبصره - عبارت  $\cot(a+b)$  و  $\cot(a-b)$  بترتیب وارون  
 عبارتهای  $\operatorname{tg}(a+b)$  و  $\operatorname{tg}(a-b)$  میباشد.

۴۸ - پردازشهای مثلثاتی مکان  $2a$  از روی پردازشهای مثلثاتی  $a$

اگر در اتحادهای (۲۹) و (۳۱) و (۳۳) بجای مکان  $a$  مکان  $2a$

بگذاریم (یعنی  $a$  را برابر  $a$  بگیریم) خواهیم داشت:

$$(۳۵) \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$(۳۶) \quad \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$(۳۷) \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$\cos 2a$  را میتوان تنها بحسب  $\sin a$  و  $\cos a$  نیز نوشت - برای  
این کار در دستور (۳۵) یکبار بجای  $\cos a$  میگذاریم  $1 - \sin^2 a$  (بنا بر تساوی)  
و بار دیگر بجای  $\sin a$  میگذاریم  $1 - \cos a$  تا برتیب دو دستور زیر بدست  
آید:

$$(۳۸) \quad \boxed{\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a}$$

$$(۳۹) \quad \boxed{\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1}$$

تبصره ۱- چنانکه می بینیم  $\cos 2a$  برابر عبارتت گویا چه بحسب  
 $\sin a$  تنها و چه بحسب  $\cos a$  تنها - و همچنین  $\sin 2a$  گویا است بحسب  
 $\sin a$  و  $\cos a$  و  $\sin 2a$  بحسب  $\sin a$  تنها و  $\cos 2a$  تنها گویا نیست زیرا  
اگر مثلاً نخواهیم تنها آن را بحسب  $\sin a$  بنویسیم بایستی بجای  $\cos a$   
عبارت گنگ  $\pm \sqrt{1 - \sin^2 a}$  را بگذاریم:

$$\sin 2a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

تبصره ۲- هرگاه در اتحادهای از (۳۵) تا (۳۹) بجای  
 $a$  کمان  $\frac{\pi}{4}$  را بگذاریم پردازشهای مثلثاتی کمان  $a$  را بحسب پردازشهای  
مثلثاتی کمان نیمه آن خواهیم داشت:

$$(۴۰) \begin{cases} \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 \\ \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \\ \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \end{cases}$$

در حقیقت میان دستورهای (۴۰) و دستورهای بالا تفاوتی هم نیست چنانچه  
هم پروازشهای مثلثاتی کمان  $2a$  را بحسب پروازشهای مثلثاتی کمان  $a$  یعنی  $a$  می دهند.

توضیح ۳- بکس میتوان  $\cos^2 a$  و  $\sin^2 a$  را بحسب  $\cos 2a$

[ از روی دو اتحاد ۳۸ و ۳۹ ] بدست آورد:

(۴۱)

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

(۴۲)

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

۴۱- پروازشهای مثلثاتی  $a$  بحسب  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$  چنانکه دیدیم عبارت

$a$  بحسب  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$  گویاست (بستگی های ۴۰):

(۴۳)

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

میتوان  $\sin a$  و  $\cos a$  را نیز بحسب  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$  بصورت عبارتهای  
گویا در آورد:

برای این کار کافی است چون  $1 = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

دوم برابرهای نخست و چهارم از بسطگی های (۱۴۰) را بر  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  تقسیم کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

پس در طرفهای دوم بر آن نام و بر آن چهار برابر  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$  تقسیم کنیم

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

و رزش - عبارت  $\cos \alpha$  را بسط می دهیم و از دو طرف آن اتحاد

طرفهای دوم در  $\cos \alpha = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  و  $\cos \alpha = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  بسط می دهیم و از طرف دیگر  $\cos \alpha = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  که بنا بر اتحاد (۱۴۱) برابر است و دیگر طرفین را اتحاد (۱۴۴)

(۱۴۴)

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

(۱۴۵)

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

و روشن است که از تقسیم کردن دو طرف (۱۴۵) بر دو طرف (۱۴۴) اتحاد (۱۴۳) بدست می آید

و رزش



طرف دوم برابری را زیر بنویسید:

$$(1) \cos(a + 45^\circ) = ? \quad (2) \sin(a + 45^\circ) = ?$$

$$(3) \sin(45^\circ - 30^\circ) = ? \quad (4) \tan(111^\circ - 60^\circ) = ?$$

$$(5) \cos(45^\circ + 60^\circ) = ? \quad (6) \tan(60^\circ - x) = ?$$

$$(7) \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x = ?$$

$$(8) \sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a = ?$$

$$(9) \sin 5a \cdot \sin a + \cos 5a \cdot \cos a = ?$$

$$(10) \cos 4a \cdot \cos a - \sin 4a \cdot \sin a = ?$$

$$(11) \frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan 3x \cdot \tan x} = ?$$

$$(12) \cos(45^\circ - a) \cdot \cos(45^\circ + a) - \sin(45^\circ - a) \cdot \sin(45^\circ + a) = ?$$

دستی برابری را زیر بنویسید:

$$(13) \sin 10^\circ + \cos 10^\circ = \cos 45^\circ$$

$$(14) \sin a \cos(90^\circ - a) - \cos a \cdot \sin(90^\circ - a) = -\cos a$$

$$(15) \cos(45^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ$$

۱- با داشتن  $\frac{b}{a} = \sin \alpha$  و  $\frac{a}{b} = \cos \theta$  حساب کنید  $\sin(\alpha + \theta)$

$\alpha$  و  $\theta$  دو گوشه است قسمی که  $\cot \theta = \frac{1}{4}$  و  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$  حساب کنید

$$\cos(\alpha + \beta) \quad (18) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad (17)$$

$$\cos(\alpha - \beta) \quad (20) \quad \sin(\alpha - \beta) \quad (19)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \quad (22) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \quad (21)$$

و نیز اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو گوشه باشند بطوریکه  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  و  $\cos \beta = \frac{1}{4}$  پروازشهای (۱۷) تا (۲۲) را حساب کنید.

۲۳- خطای مثلثاتی ۱۵ و ۷۵ را حساب کرده دستی برابریهای زیر را برآورد

$$\text{نمایند } (30^\circ - 45^\circ - 15^\circ):$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\dots \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \cos 15^\circ$$

۲۴- خطای مثلثاتی ۱۵ را حساب کنید.

۲۵- از روی خطای مثلثاتی ۳ و ۶ حساب کنید  $\cos 9^\circ$

و  $\sin 9^\circ$  را

۲۶- کمانیت که تیر آن در بخش سوم از دایره مثلثاتی است و کمانیت که تیر

آن در بخش دوم است را داریم  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{10}$  حساب کنید

$$\sin(\alpha \pm \beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$$

۲۷- از روی پردازشهای مثلثاتی  $x$  و  $y$  و  $z$  حساب کنید پردازشهای

مثلثاتی  $x + y + z$  را.

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمایید:

$$\frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}(x+y) \cdot \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y \quad (28)$$

$$\cos x \cos(x-y) + \sin x \sin(x-y) = \cos y \quad (29)$$

$$\cos(x-y) + \sin(x+y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y) \quad (30)$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} \quad (31)$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x \cdot \cot y + 1} \quad (32)$$

$$\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x = \sin 2x \quad (33)$$

$$\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x = \sin 4x \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - x) &= \cos x \\ \cos(180^\circ - x) &= -\cos x \\ \operatorname{tg}(180^\circ - x) &= -\operatorname{tg} x \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad (36)$$

$$\operatorname{tg}(x \pm 45^\circ) + \cot(x \mp 45^\circ) = 0 \quad (37)$$

$$\sin(90^\circ + x) \cdot \cos(90^\circ + x) - \cos(90^\circ + x) \cdot \sin(90^\circ + x) = \frac{1}{2} \quad (38)$$

$$\frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} = \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b \quad (۲۹)$$

(۴۰)  $x$  گوشه است میان  $۹۰^\circ$  و  $۱۸۰^\circ$   $x \in (۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ)$  یعنی که

$$\sin x = \frac{r}{\Delta} \quad \text{حساب کنید پرده‌های زیر را:}$$

$$\operatorname{tg} 2x \quad ; \quad \cos 2x \quad , \quad \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad ; \quad \cos \frac{x}{2} \quad , \quad \sin \frac{x}{2}$$

انتخابی زیر اثبات کنید:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad (۴۱)$$

$$\cos 2x = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{2} - x)} \quad (۴۲)$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \quad (۴۳)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \quad (۴۴)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (۴۵)$$

$$\cos 2x = \frac{\cot x - \operatorname{tg} x}{\cot x + \operatorname{tg} x} \quad (۴۶)$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (۴۷)$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + x) - \operatorname{tg}(90^\circ - x) = 2 \operatorname{tg} x \quad (۴۸)$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (۴۹)$$

$$\sin 3x = 2 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (۵۰)$$

$$tg^3 \alpha = \frac{3 tg \alpha - tg^3 \alpha}{1 - 3 tg^2 \alpha} \quad (51)$$

(۵۲) خطای مثلثاتی ۲۲٫۵ را به کمک دستورهای (۴۱) و (۴۲)

به دست آورید و برابرهای زیر را ثابت کنید.

$$\cos 22^\circ 30' = \frac{1}{4} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \sin 22^\circ 30' = \frac{1}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cot 22^\circ 30' = \sqrt{2} + 1 \quad \text{و} \quad tg 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$$

(۵۳) برابرهای ورزش (۵۲) را از روی ورزش (۴۴) و اتحاد (۲۱) نیز

به دست آورید.

(۵۴) ثابت کنید که سینوس یک گمان کوچکتر از ۹۰ برابر است با نیمه زده گمان

و در برابر آن از دایره مثلثاتی.

از نیز و نیز دستی برابرهای ورزش های (۲۳) و (۵۲) را بررسی نمایید.

(۵۵) ثابت کنید که نسبت پهنه یک پنج پهلوی منتظم به پهنه یک ده پهلوی منتظم

سردی و محیط دایره (دایره) برابر  $\cos 36^\circ$  است

(۵۶) پیدا کنید خطای مثلثاتی ۳۰ را از روی خطای مثلثاتی ۶۰

$$30^\circ \quad = \quad = \quad 60^\circ \quad = \quad =$$

$$30^\circ \quad = \quad = \quad 15^\circ \quad = \quad =$$

$$15^\circ \quad = \quad = \quad 7.5^\circ \quad = \quad =$$

جدول

پردازش های مشتقاتی

کامپلکس های از ۰ تا ۹۰

ویا

از ۰ تا ۱۵۷۸ رادیان

ردیف	زین	سینوس	آرکانت	آرکانت متمم	سینوس متمم	زین	ردیف
۱.۵۷۰۸	۰.۰۰	۰.۰۰۰۰	—	۰.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۰۰	۱.۵۷۰۸
۱.۵۶۷۹	۱.۰۰	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۰۰	۱.۰۰	۱.۵۶۷۹
۱.۵۶۵۰	۲.۰۰	۰.۰۰۵۸	۰.۰۰۵۸	۰.۰۰۵۸	۰.۰۰۰۰	۲.۰۰	۱.۵۶۵۰
۱.۵۶۲۱	۳.۰۰	۰.۰۰۸۷	۰.۰۰۸۷	۰.۰۰۸۷	۰.۰۰۰۰	۳.۰۰	۱.۵۶۲۱
۱.۵۵۹۲	۴.۰۰	۰.۰۱۱۶	۰.۰۱۱۶	۰.۰۱۱۶	۰.۰۰۹۹۹۹	۴.۰۰	۱.۵۵۹۲
۱.۵۵۶۳	۵.۰۰	۰.۰۱۴۵	۰.۰۱۴۵	۰.۰۱۴۵	۰.۰۰۹۹۹۹	۵.۰۰	۱.۵۵۶۳
۱.۵۵۳۴	۶.۰۰	۰.۰۱۷۵	۰.۰۱۷۵	۰.۰۱۷۵	۰.۰۰۹۹۹۸	۶.۰۰	۱.۵۵۳۴
۱.۵۵۰۴	۱.۰۰	۰.۰۲۰۴	۰.۰۲۰۴	۰.۰۲۰۴	۰.۰۰۹۹۹۸	۱.۰۰	۱.۵۵۰۴
۱.۵۴۷۵	۲.۰۰	۰.۰۲۳۳	۰.۰۲۳۳	۰.۰۲۳۳	۰.۰۰۹۹۹۷	۲.۰۰	۱.۵۴۷۵
۱.۵۴۴۶	۳.۰۰	۰.۰۲۶۲	۰.۰۲۶۲	۰.۰۲۶۲	۰.۰۰۹۹۹۷	۳.۰۰	۱.۵۴۴۶
۱.۵۴۱۷	۴.۰۰	۰.۰۲۹۱	۰.۰۲۹۱	۰.۰۲۹۱	۰.۰۰۹۹۹۶	۴.۰۰	۱.۵۴۱۷
۱.۵۳۸۸	۵.۰۰	۰.۰۳۲۰	۰.۰۳۲۰	۰.۰۳۲۰	۰.۰۰۹۹۹۵	۵.۰۰	۱.۵۳۸۸
۱.۵۳۵۹	۶.۰۰	۰.۰۳۴۹	۰.۰۳۴۹	۰.۰۳۴۹	۰.۰۰۹۹۹۴	۶.۰۰	۱.۵۳۵۹
۱.۵۳۳۰	۱.۰۰	۰.۰۳۷۸	۰.۰۳۷۸	۰.۰۳۷۸	۰.۰۰۹۹۹۳	۱.۰۰	۱.۵۳۳۰
۱.۵۳۰۱	۲.۰۰	۰.۰۴۰۷	۰.۰۴۰۷	۰.۰۴۰۷	۰.۰۰۹۹۹۲	۲.۰۰	۱.۵۳۰۱
۱.۵۲۷۲	۳.۰۰	۰.۰۴۳۶	۰.۰۴۳۶	۰.۰۴۳۶	۰.۰۰۹۹۹۰	۳.۰۰	۱.۵۲۷۲
۱.۵۲۴۳	۴.۰۰	۰.۰۴۶۵	۰.۰۴۶۵	۰.۰۴۶۵	۰.۰۰۹۹۸۹	۴.۰۰	۱.۵۲۴۳
۱.۵۲۱۴	۵.۰۰	۰.۰۴۹۴	۰.۰۴۹۴	۰.۰۴۹۴	۰.۰۰۹۹۸۸	۵.۰۰	۱.۵۲۱۴
۱.۵۱۸۴	۶.۰۰	۰.۰۵۲۳	۰.۰۵۲۳	۰.۰۵۲۳	۰.۰۰۹۹۸۶	۶.۰۰	۱.۵۱۸۴
۱.۵۱۵۵	۱.۰۰	۰.۰۵۵۲	۰.۰۵۵۲	۰.۰۵۵۲	۰.۰۰۹۹۸۵	۱.۰۰	۱.۵۱۵۵
۱.۵۱۲۶	۲.۰۰	۰.۰۵۸۱	۰.۰۵۸۱	۰.۰۵۸۱	۰.۰۰۹۹۸۲	۲.۰۰	۱.۵۱۲۶
۱.۵۰۹۷	۳.۰۰	۰.۰۶۱۰	۰.۰۶۱۰	۰.۰۶۱۰	۰.۰۰۹۹۸۱	۳.۰۰	۱.۵۰۹۷
۱.۵۰۶۸	۴.۰۰	۰.۰۶۴۰	۰.۰۶۴۰	۰.۰۶۴۰	۰.۰۰۹۹۸۰	۴.۰۰	۱.۵۰۶۸
۱.۵۰۳۹	۵.۰۰	۰.۰۶۶۹	۰.۰۶۶۹	۰.۰۶۶۹	۰.۰۰۹۹۷۸	۵.۰۰	۱.۵۰۳۹
۱.۵۰۱۰	۶.۰۰	۰.۰۶۹۸	۰.۰۶۹۸	۰.۰۶۹۸	۰.۰۰۹۹۷۶	۶.۰۰	۱.۵۰۱۰
۱.۴۹۸۱	۱.۰۰	۰.۰۷۲۷	۰.۰۷۲۷	۰.۰۷۲۷	۰.۰۰۹۹۷۴	۱.۰۰	۱.۴۹۸۱
۱.۴۹۵۲	۲.۰۰	۰.۰۷۵۶	۰.۰۷۵۶	۰.۰۷۵۶	۰.۰۰۹۹۷۱	۲.۰۰	۱.۴۹۵۲
۱.۴۹۲۳	۳.۰۰	۰.۰۷۸۵	۰.۰۷۸۵	۰.۰۷۸۵	۰.۰۰۹۹۶۹	۳.۰۰	۱.۴۹۲۳
۱.۴۸۹۴	۴.۰۰	۰.۰۸۱۴	۰.۰۸۱۴	۰.۰۸۱۴	۰.۰۰۹۹۶۷	۴.۰۰	۱.۴۸۹۴
۱.۴۸۶۴	۵.۰۰	۰.۰۸۴۳	۰.۰۸۴۳	۰.۰۸۴۳	۰.۰۰۹۹۶۴	۵.۰۰	۱.۴۸۶۴
۱.۴۸۳۵	۶.۰۰	۰.۰۸۷۲	۰.۰۸۷۲	۰.۰۸۷۲	۰.۰۰۹۹۶۲	۶.۰۰	۱.۴۸۳۵
۱.۴۸۰۶	۱.۰۰	۰.۰۹۰۱	۰.۰۹۰۱	۰.۰۹۰۱	۰.۰۰۹۹۶۰	۱.۰۰	۱.۴۸۰۶
۱.۴۷۷۷	۲.۰۰	۰.۰۹۳۰	۰.۰۹۳۰	۰.۰۹۳۰	۰.۰۰۹۹۵۸	۲.۰۰	۱.۴۷۷۷
۱.۴۷۴۸	۳.۰۰	۰.۰۹۵۹	۰.۰۹۵۹	۰.۰۹۵۹	۰.۰۰۹۹۵۶	۳.۰۰	۱.۴۷۴۸
۱.۴۷۱۹	۴.۰۰	۰.۰۹۸۸	۰.۰۹۸۸	۰.۰۹۸۸	۰.۰۰۹۹۵۴	۴.۰۰	۱.۴۷۱۹
۱.۴۶۹۰	۵.۰۰	۰.۱۰۱۷	۰.۱۰۱۷	۰.۱۰۱۷	۰.۰۰۹۹۵۲	۵.۰۰	۱.۴۶۹۰
۱.۴۶۶۱	۶.۰۰	۰.۱۰۴۶	۰.۱۰۴۶	۰.۱۰۴۶	۰.۰۰۹۹۵۰	۶.۰۰	۱.۴۶۶۱
۱.۴۶۳۲	۱.۰۰	۰.۱۰۷۵	۰.۱۰۷۵	۰.۱۰۷۵	۰.۰۰۹۹۴۸	۱.۰۰	۱.۴۶۳۲
۱.۴۶۰۳	۲.۰۰	۰.۱۱۰۴	۰.۱۱۰۴	۰.۱۱۰۴	۰.۰۰۹۹۴۶	۲.۰۰	۱.۴۶۰۳
۱.۴۵۷۴	۳.۰۰	۰.۱۱۳۳	۰.۱۱۳۳	۰.۱۱۳۳	۰.۰۰۹۹۴۴	۳.۰۰	۱.۴۵۷۴
۱.۴۵۴۵	۴.۰۰	۰.۱۱۶۲	۰.۱۱۶۲	۰.۱۱۶۲	۰.۰۰۹۹۴۲	۴.۰۰	۱.۴۵۴۵
۱.۴۵۱۶	۵.۰۰	۰.۱۱۹۱	۰.۱۱۹۱	۰.۱۱۹۱	۰.۰۰۹۹۴۰	۵.۰۰	۱.۴۵۱۶
۱.۴۴۸۷	۶.۰۰	۰.۱۲۲۰	۰.۱۲۲۰	۰.۱۲۲۰	۰.۰۰۹۹۳۸	۶.۰۰	۱.۴۴۸۷
۱.۴۴۵۸	۱.۰۰	۰.۱۲۴۹	۰.۱۲۴۹	۰.۱۲۴۹	۰.۰۰۹۹۳۶	۱.۰۰	۱.۴۴۵۸
۱.۴۴۲۹	۲.۰۰	۰.۱۲۷۸	۰.۱۲۷۸	۰.۱۲۷۸	۰.۰۰۹۹۳۴	۲.۰۰	۱.۴۴۲۹
۱.۴۴۰۰	۳.۰۰	۰.۱۳۰۷	۰.۱۳۰۷	۰.۱۳۰۷	۰.۰۰۹۹۳۲	۳.۰۰	۱.۴۴۰۰
۱.۴۳۷۱	۴.۰۰	۰.۱۳۳۶	۰.۱۳۳۶	۰.۱۳۳۶	۰.۰۰۹۹۳۰	۴.۰۰	۱.۴۳۷۱
۱.۴۳۴۲	۵.۰۰	۰.۱۳۶۵	۰.۱۳۶۵	۰.۱۳۶۵	۰.۰۰۹۹۲۸	۵.۰۰	۱.۴۳۴۲
۱.۴۳۱۳	۶.۰۰	۰.۱۳۹۴	۰.۱۳۹۴	۰.۱۳۹۴	۰.۰۰۹۹۲۶	۶.۰۰	۱.۴۳۱۳
۱.۴۲۸۴	۱.۰۰	۰.۱۴۲۳	۰.۱۴۲۳	۰.۱۴۲۳	۰.۰۰۹۹۲۴	۱.۰۰	۱.۴۲۸۴
۱.۴۲۵۵	۲.۰۰	۰.۱۴۵۲	۰.۱۴۵۲	۰.۱۴۵۲	۰.۰۰۹۹۲۲	۲.۰۰	۱.۴۲۵۵
۱.۴۲۲۶	۳.۰۰	۰.۱۴۸۱	۰.۱۴۸۱	۰.۱۴۸۱	۰.۰۰۹۹۲۰	۳.۰۰	۱.۴۲۲۶
۱.۴۱۹۷	۴.۰۰	۰.۱۵۱۰	۰.۱۵۱۰	۰.۱۵۱۰	۰.۰۰۹۹۱۸	۴.۰۰	۱.۴۱۹۷
۱.۴۱۶۸	۵.۰۰	۰.۱۵۳۹	۰.۱۵۳۹	۰.۱۵۳۹	۰.۰۰۹۹۱۶	۵.۰۰	۱.۴۱۶۸
۱.۴۱۳۹	۶.۰۰	۰.۱۵۶۸	۰.۱۵۶۸	۰.۱۵۶۸	۰.۰۰۹۹۱۴	۶.۰۰	۱.۴۱۳۹
۱.۴۱۱۰	۱.۰۰	۰.۱۵۹۷	۰.۱۵۹۷	۰.۱۵۹۷	۰.۰۰۹۹۱۲	۱.۰۰	۱.۴۱۱۰
۱.۴۰۸۱	۲.۰۰	۰.۱۶۲۶	۰.۱۶۲۶	۰.۱۶۲۶	۰.۰۰۹۹۱۰	۲.۰۰	۱.۴۰۸۱
۱.۴۰۵۲	۳.۰۰	۰.۱۶۵۵	۰.۱۶۵۵	۰.۱۶۵۵	۰.۰۰۹۹۰۸	۳.۰۰	۱.۴۰۵۲
۱.۴۰۲۳	۴.۰۰	۰.۱۶۸۴	۰.۱۶۸۴	۰.۱۶۸۴	۰.۰۰۹۹۰۶	۴.۰۰	۱.۴۰۲۳
۱.۳۹۹۴	۵.۰۰	۰.۱۷۱۳	۰.۱۷۱۳	۰.۱۷۱۳	۰.۰۰۹۹۰۴	۵.۰۰	۱.۳۹۹۴
۱.۳۹۶۵	۶.۰۰	۰.۱۷۴۲	۰.۱۷۴۲	۰.۱۷۴۲	۰.۰۰۹۹۰۲	۶.۰۰	۱.۳۹۶۵
۱.۳۹۳۶	۱.۰۰	۰.۱۷۷۱	۰.۱۷۷۱	۰.۱۷۷۱	۰.۰۰۹۹۰۰	۱.۰۰	۱.۳۹۳۶
۱.۳۹۰۷	۲.۰۰	۰.۱۸۰۰	۰.۱۸۰۰	۰.۱۸۰۰	۰.۰۰۹۸۹۸	۲.۰۰	۱.۳۹۰۷
۱.۳۸۷۸	۳.۰۰	۰.۱۸۲۹	۰.۱۸۲۹	۰.۱۸۲۹	۰.۰۰۹۸۹۶	۳.۰۰	۱.۳۸۷۸
۱.۳۸۴۹	۴.۰۰	۰.۱۸۵۸	۰.۱۸۵۸	۰.۱۸۵۸	۰.۰۰۹۸۹۴	۴.۰۰	۱.۳۸۴۹
۱.۳۸۲۰	۵.۰۰	۰.۱۸۸۷	۰.۱۸۸۷	۰.۱۸۸۷	۰.۰۰۹۸۹۲	۵.۰۰	۱.۳۸۲۰
۱.۳۷۹۱	۶.۰۰	۰.۱۹۱۶	۰.۱۹۱۶	۰.۱۹۱۶	۰.۰۰۹۸۹۰	۶.۰۰	۱.۳۷۹۱
۱.۳۷۶۲	۱.۰۰	۰.۱۹۴۵	۰.۱۹۴۵	۰.۱۹۴۵	۰.۰۰۹۸۸۸	۱.۰۰	۱.۳۷۶۲
۱.۳۷۳۳	۲.۰۰	۰.۱۹۷۴	۰.۱۹۷۴	۰.۱۹۷۴	۰.۰۰۹۸۸۶	۲.۰۰	۱.۳۷۳۳
۱.۳۷۰۴	۳.۰۰	۰.۲۰۰۳	۰.۲۰۰۳	۰.۲۰۰۳	۰.۰۰۹۸۸۴	۳.۰۰	۱.۳۷۰۴
۱.۳۶۷۵	۴.۰۰	۰.۲۰۳۲	۰.۲۰۳۲	۰.۲۰۳۲	۰.۰۰۹۸۸۲	۴.۰۰	۱.۳۶۷۵
۱.۳۶۴۶	۵.۰۰	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۶۱	۰.۰۰۹۸۸۰	۵.۰۰	۱.۳۶۴۶
۱.۳۶۱۷	۶.۰۰	۰.۲۰۹۰	۰.۲۰۹۰	۰.۲۰۹۰	۰.۰۰۹۸۷۸	۶.۰۰	۱.۳۶۱۷
۱.۳۵۸۸	۱.۰۰	۰.۲۱۱۹	۰.۲۱۱۹	۰.۲۱۱۹	۰.۰۰۹۸۷۶	۱.۰۰	۱.۳۵۸۸
۱.۳۵۵۹	۲.۰۰	۰.۲۱۴۸	۰.۲۱۴۸	۰.۲۱۴۸	۰.۰۰۹۸۷۴	۲.۰۰	۱.۳۵۵۹
۱.۳۵۳۰	۳.۰۰	۰.۲۱۷۷	۰.۲۱۷۷	۰.۲۱۷۷	۰.۰۰۹۸۷۲	۳.۰۰	۱.۳۵۳۰
۱.۳۵۰۱	۴.۰۰	۰.۲۲۰۶	۰.۲۲۰۶	۰.۲۲۰۶	۰.۰۰۹۸۷۰	۴.۰۰	۱.۳۵۰۱
۱.۳۴۷۲	۵.۰۰	۰.۲۲۳۵	۰.۲۲۳۵	۰.۲۲۳۵	۰.۰۰۹۸۶۸	۵.۰۰	۱.۳۴۷۲
۱.۳۴۴۳	۶.۰۰	۰.۲۲۶۴	۰.۲۲۶۴	۰.۲۲۶۴	۰.۰۰۹۸۶۶	۶.۰۰	۱.۳۴۴۳
۱.۳۴۱۴	۱.۰۰	۰.۲۲۹۳	۰.۲۲۹۳	۰.۲۲۹۳	۰.۰۰۹۸۶۴	۱.۰۰	۱.۳۴۱۴
۱.۳۳۸۵	۲.۰۰	۰.۲۳۲۲	۰.۲۳۲۲	۰.۲۳۲۲	۰.۰۰۹۸۶۲	۲.۰۰	۱.۳۳۸۵
۱.۳۳۵۶	۳.۰۰	۰.۲۳۵۱	۰.۲۳۵۱	۰.۲۳۵۱	۰.۰۰۹۸۶۰	۳.۰۰	۱.۳۳۵۶
۱.۳۳۲۷	۴.۰۰	۰.۲۳۸۰	۰.۲۳۸۰	۰.۲۳۸۰	۰.۰۰۹۸۵۸	۴.۰۰	۱.۳۳۲۷
۱.۳۲۹۸	۵.۰۰	۰.۲۴۰۹	۰.۲۴۰۹	۰.۲۴۰۹	۰.۰۰۹۸۵۶	۵.۰۰	۱.۳۲۹۸
۱.۳۲۶۹	۶.۰۰	۰.۲۴۳۸	۰.۲۴۳۸	۰.۲۴۳۸	۰.۰۰۹۸۵۴	۶.۰۰	۱.۳۲۶۹
۱.۳۲۴۰	۱.۰۰	۰.۲۴۶۷	۰.۲۴۶۷	۰.۲۴۶۷	۰.۰۰۹۸۵۲	۱.۰۰	۱.۳۲۴۰
۱.۳۲۱۱	۲.۰۰	۰.۲۴۹۶	۰.۲۴۹۶	۰.۲۴۹۶	۰.۰۰۹۸۵۰	۲.۰۰	۱.۳۲۱۱
۱.۳۱۸۲	۳.۰۰	۰.۲۵۲۵	۰.۲۵۲۵	۰.۲۵۲۵	۰.۰۰۹۸۴۸	۳.۰۰	۱.۳۱۸۲
۱.۳۱۵۳	۴.۰۰	۰.۲۵۵۴	۰.۲۵۵۴	۰.۲۵۵۴	۰.۰۰۹۸۴۶	۴.۰۰	۱.۳۱۵۳
۱.۳۱۲۴	۵.۰۰	۰.۲۵۸۳	۰.۲۵۸۳	۰.۲۵۸۳	۰.۰۰۹۸۴۴	۵.۰۰	۱.۳۱۲۴
۱.۳۰۹۵	۶.۰۰	۰.۲۶۱۲	۰.۲۶۱۲	۰.۲۶۱۲	۰.۰۰۹۸۴۲	۶.۰۰	۱.۳۰۹۵
۱.۳۰۶۶	۱.۰۰	۰.۲۶۴۱	۰.۲۶۴۱	۰.۲۶۴۱	۰.۰۰۹۸۴۰	۱.۰۰	۱.۳۰۶۶
۱.۳۰۳۷	۲.۰۰	۰.۲۶۷۰	۰.۲۶۷۰	۰.۲۶۷۰	۰.۰۰۹۸۳۸	۲.۰۰	۱.۳۰۳۷
۱.۳۰۰۸	۳.۰۰	۰.۲۶۹۹	۰.۲۶۹۹	۰.۲۶۹۹	۰.۰۰۹۸۳۶	۳.۰۰	۱.۳۰۰۸
۱.۲۹۷۹	۴.۰۰	۰.۲۷۲					

رادیان	زین	سینوس	تارانت	تارانت مسم	سینوس مسم		
۰.۸۷۳	۵.۰	۰.۸۷۲	۰.۸۷۵	۱۱.۴۳۰	۰.۹۹۶۲	۸۵.۰	۱.۴۸۲۵
۰.۹۰۲	۱۰.۰	۰.۹۰۱	۰.۹۰۴	۱۱.۰۵۶	۰.۹۹۵۹	۵۰.۰	۱.۴۸۰۶
۰.۹۳۱	۲۰.۰	۰.۹۲۹	۰.۹۳۴	۱۰.۷۱۲	۰.۹۹۵۷	۴۰.۰	۱.۴۷۷۷
۰.۹۶۰	۳۰.۰	۰.۹۵۸	۰.۹۶۳	۱۰.۳۸۵	۰.۹۹۵۴	۳۰.۰	۱.۴۷۴۸
۰.۹۸۹	۴۰.۰	۰.۹۸۷	۰.۹۹۲	۱۰.۰۷۸	۰.۹۹۵۱	۲۰.۰	۱.۴۷۱۹
۱.۰۱۸	۵۰.۰	۱.۰۱۶	۱.۰۲۲	۹.۷۸۸۲	۰.۹۹۴۸	۱۰.۰	۱.۴۶۹۰
۱.۰۴۷	۶۰.۰	۱.۰۴۵	۱.۰۵۱	۹.۵۱۴۴	۰.۹۹۴۵	۸۴.۰	۱.۴۶۶۱
۱.۰۷۶	۱۰.۰	۱.۰۷۴	۱.۰۸۰	۹.۲۵۵۳	۰.۹۹۴۲	۵۰.۰	۱.۴۶۳۲
۱.۱۰۵	۲۰.۰	۱.۱۰۳	۱.۱۱۰	۹.۰۰۹۸	۰.۹۹۳۹	۴۰.۰	۱.۴۶۰۳
۱.۱۳۴	۳۰.۰	۱.۱۳۲	۱.۱۳۹	۸.۷۷۶۹	۰.۹۹۳۶	۳۰.۰	۱.۴۵۷۳
۱.۱۶۴	۴۰.۰	۱.۱۶۱	۱.۱۶۹	۸.۵۵۵۵	۰.۹۹۳۲	۲۰.۰	۱.۴۵۴۴
۱.۱۹۳	۵۰.۰	۱.۱۹۰	۱.۱۹۸	۸.۳۴۵۰	۰.۹۹۲۹	۱۰.۰	۱.۴۵۱۵
۱.۲۲۲	۶۰.۰	۱.۲۱۹	۱.۲۲۸	۸.۱۴۴۳	۰.۹۹۲۵	۸۳.۰	۱.۴۴۸۶
۱.۲۵۱	۱۰.۰	۱.۲۴۸	۱.۲۵۷	۷.۹۵۳۰	۰.۹۹۲۲	۵۰.۰	۱.۴۴۵۷
۱.۲۸۰	۲۰.۰	۱.۲۷۶	۱.۲۸۷	۷.۷۷۰۴	۰.۹۹۱۸	۴۰.۰	۱.۴۴۲۸
۱.۳۰۹	۳۰.۰	۱.۳۰۵	۱.۳۱۷	۷.۵۹۵۸	۰.۹۹۱۴	۳۰.۰	۱.۴۳۹۹
۱.۳۳۸	۴۰.۰	۱.۳۳۴	۱.۳۴۶	۷.۴۲۸۷	۰.۹۹۱۱	۲۰.۰	۱.۴۳۷۰
۱.۳۶۷	۵۰.۰	۱.۳۶۳	۱.۳۷۶	۷.۲۶۸۷	۰.۹۹۰۷	۱۰.۰	۱.۴۳۴۱
۱.۳۹۶	۶۰.۰	۱.۳۹۲	۱.۴۰۵	۷.۱۱۵۴	۰.۹۹۰۳	۸۲.۰	۱.۴۳۱۲
۱.۴۲۵	۱۰.۰	۱.۴۲۱	۱.۴۳۵	۶.۹۶۸۲	۰.۹۸۹۹	۵۰.۰	۱.۴۲۸۳
۱.۴۵۴	۲۰.۰	۱.۴۴۹	۱.۴۶۵	۶.۸۲۶۹	۰.۹۸۹۴	۴۰.۰	۱.۴۲۵۴
۱.۴۸۳	۳۰.۰	۱.۴۷۸	۱.۴۹۵	۶.۶۹۱۲	۰.۹۸۹۰	۳۰.۰	۱.۴۲۲۴
۱.۵۱۳	۴۰.۰	۱.۵۰۷	۱.۵۲۴	۶.۵۶۰۶	۰.۹۸۸۶	۲۰.۰	۱.۴۱۹۵
۱.۵۴۲	۵۰.۰	۱.۵۳۶	۱.۵۵۳	۶.۴۳۴۸	۰.۹۸۸۱	۱۰.۰	۱.۴۱۶۶
۱.۵۷۱	۶۰.۰	۱.۵۶۴	۱.۵۸۳	۶.۳۱۲۸	۰.۹۸۷۷	۸۱.۰	۱.۴۱۳۷
۱.۶۰۰	۱۰.۰	۱.۵۹۳	۱.۶۱۴	۶.۱۹۷۰	۰.۹۸۷۲	۵۰.۰	۱.۴۱۰۸
۱.۶۲۹	۲۰.۰	۱.۶۲۲	۱.۶۳۴	۶.۰۸۴۴	۰.۹۸۶۸	۴۰.۰	۱.۴۰۷۹
۱.۶۵۸	۳۰.۰	۱.۶۵۵	۱.۶۶۳	۵.۹۷۵۸	۰.۹۸۶۳	۳۰.۰	۱.۴۰۵۰
۱.۶۸۷	۴۰.۰	۱.۶۸۰	۱.۶۹۳	۵.۸۷۱۸	۰.۹۸۵۸	۲۰.۰	۱.۴۰۲۱
۱.۷۱۶	۵۰.۰	۱.۷۰۸	۱.۷۲۳	۵.۷۶۹۴	۰.۹۸۵۳	۱۰.۰	۱.۳۹۹۲
۱.۷۴۵	۶۰.۰	۱.۷۳۶	۱.۷۶۳	۵.۶۷۱۳	۰.۹۸۴۸	۸۰.۰	۱.۳۹۶۳
		سینوس مسم	تارانت مسم	تارانت	سینوس	زین	رادیان



رادبان	زینہ	سینوس	آثرات	آثرات متم	سینوس متم	
۱۷۷۴	۱۰	۱۷۳۶	۱۷۶۳	۵۶۷۱۳	۹۸۴۸	۸۰
۱۷۷۴	۱۰	۱۷۶۵	۱۷۹۳	۵۵۷۶۴	۹۸۴۳	۵۰
۱۸۰۴	۲۰	۱۷۹۴	۱۸۲۳	۵۴۸۴۵	۹۸۳۸	۴۰
۱۸۳۳	۳۰	۱۸۲۲	۱۸۵۳	۵۳۹۵۵	۹۸۳۳	۳۰
۱۸۶۲	۴۰	۱۸۵۱	۱۸۸۳	۵۳۰۹۲	۹۸۲۷	۲۰
۱۸۹۱	۵۰	۱۸۸۰	۱۹۱۴	۵۲۲۵۷	۹۸۲۲	۱۰
۱۹۲۰	۱۱	۱۹۰۸	۱۹۴۳	۵۱۳۴۶	۹۸۱۶	۷۹
۱۹۴۹	۱۰	۱۹۳۷	۱۹۷۲	۵۰۶۵۸	۹۸۱۱	۵۰
۱۹۷۸	۲۰	۱۹۶۵	۲۰۰۴	۴۹۸۹۴	۹۸۰۵	۴۰
۲۰۰۷	۳۰	۱۹۹۴	۲۰۳۵	۴۹۱۵۲	۹۷۹۹	۳۰
۲۰۳۶	۴۰	۲۰۲۲	۲۰۶۵	۴۸۴۳۰	۹۷۹۳	۲۰
۲۰۶۵	۵۰	۲۰۵۱	۲۰۹۵	۴۷۷۲۹	۹۷۸۷	۱۰
۲۰۹۴	۱۲	۲۰۷۹	۲۱۲۶	۴۷۰۴۶	۹۷۸۱	۷۸
۲۱۲۳	۱۰	۲۱۰۸	۲۱۵۶	۴۶۳۸۲	۹۷۷۵	۵۰
۲۱۵۳	۲۰	۲۱۳۶	۲۱۸۶	۴۵۷۳۶	۹۷۶۹	۴۰
۲۱۸۲	۳۰	۲۱۶۴	۲۲۱۷	۴۵۱۰۷	۹۷۶۳	۳۰
۲۲۱۱	۴۰	۲۱۹۳	۲۲۴۷	۴۴۴۹۴	۹۷۵۷	۲۰
۲۲۴۰	۵۰	۲۲۲۱	۲۲۷۸	۴۳۸۹۷	۹۷۵۰	۱۰
۲۲۶۹	۱۳	۲۲۵۰	۲۳۰۹	۴۳۳۱۵	۹۷۴۴	۷۷
۲۲۹۸	۱۰	۲۲۲۸	۲۳۳۹	۴۲۷۴۷	۹۷۳۷	۵۰
۲۳۲۷	۲۰	۲۳۰۶	۲۳۷۰	۴۲۱۹۳	۹۷۳۰	۴۰
۲۳۵۶	۳۰	۲۳۳۴	۲۴۰۱	۴۱۶۵۳	۹۷۲۴	۳۰
۲۳۸۵	۴۰	۲۳۶۳	۲۴۳۲	۴۱۱۲۶	۹۷۱۷	۲۰
۲۴۱۴	۵۰	۲۳۹۱	۲۴۶۲	۴۰۶۱۱	۹۷۱۰	۱۰
۲۴۴۳	۱۴	۲۴۱۹	۲۴۹۳	۴۰۱۰۸	۹۷۰۳	۷۶
۲۴۷۲	۱۰	۲۴۴۷	۲۵۲۴	۳۹۶۱۷	۹۶۹۶	۵۰
۲۵۰۲	۲۰	۲۴۷۶	۲۵۵۵	۳۹۱۳۶	۹۶۸۹	۴۰
۲۵۳۱	۳۰	۲۵۰۴	۲۵۸۶	۳۸۶۶۷	۹۶۸۱	۳۰
۲۵۶۰	۴۰	۲۵۳۲	۲۶۱۷	۳۸۲۰۸	۹۶۷۴	۲۰
۲۵۸۹	۵۰	۲۵۶۰	۲۶۴۸	۳۷۷۶۸	۹۶۶۷	۱۰
۲۶۱۸	۱۵	۲۵۸۸	۲۶۷۹	۳۷۳۲۱	۹۶۵۹	۷۵
			سینوس متم	آثرات متم	سینوس	زینہ
			آثرات	رادبان		



رادبان	زینہ	سینوس	انوارت	انوارت متعم	سینوس متعم	
۱.۳۴۹۱	۲۰.۰۰	۳۴۴۰	۳۶۴۰	۷۴۷۵	۹۳۹۷	۷۰.۰۰
۱.۳۵۲۰	۱۰.۰۰	۳۴۴۸	۳۶۷۳	۷۲۲۸	۹۳۸۷	۵۰.۰۰
۱.۳۵۴۹	۲۰.۰۰	۳۴۷۵	۳۷۰۶	۶۹۸۵	۹۳۷۷	۴۰.۰۰
۱.۳۵۷۸	۳۰.۰۰	۳۵۰۲	۳۷۳۹	۶۷۴۶	۹۳۶۷	۳۰.۰۰
۱.۳۶۰۷	۴۰.۰۰	۳۵۲۹	۳۷۷۲	۶۵۱۱	۹۳۵۶	۲۰.۰۰
۱.۳۶۳۶	۵۰.۰۰	۳۵۵۷	۳۸۰۵	۶۲۷۹	۹۳۴۶	۱۰.۰۰
۱.۳۶۶۵	۶۰.۰۰	۳۵۸۴	۳۸۳۹	۶۰۵۱	۹۳۳۶	۰.۰۰
۱.۳۶۹۴	۱۰.۰۰	۳۶۱۱	۳۸۷۲	۵۸۲۶	۹۳۲۵	۵۰.۰۰
۱.۳۷۲۳	۲۰.۰۰	۳۶۳۸	۳۹۰۶	۵۶۰۵	۹۳۱۵	۴۰.۰۰
۱.۳۷۵۲	۳۰.۰۰	۳۶۶۵	۳۹۳۹	۵۳۸۶	۹۳۰۴	۳۰.۰۰
۱.۳۷۸۲	۴۰.۰۰	۳۶۹۲	۳۹۷۳	۵۱۷۲	۹۲۹۳	۲۰.۰۰
۱.۳۸۱۱	۵۰.۰۰	۳۷۱۹	۴۰۰۶	۴۹۶۰	۹۲۸۳	۱۰.۰۰
۱.۳۸۴۰	۶۰.۰۰	۳۷۴۶	۴۰۴۰	۴۷۵۱	۹۲۷۲	۰.۰۰
۱.۳۸۶۹	۱۰.۰۰	۳۷۷۳	۴۰۷۴	۴۵۴۵	۹۲۶۱	۵۰.۰۰
۱.۳۸۹۸	۲۰.۰۰	۳۸۰۰	۴۱۰۸	۴۳۳۲	۹۲۵۰	۴۰.۰۰
۱.۳۹۲۷	۳۰.۰۰	۳۸۲۷	۴۱۴۲	۴۱۴۲	۹۲۳۹	۳۰.۰۰
۱.۳۹۵۶	۴۰.۰۰	۳۸۵۴	۴۱۷۶	۳۹۴۵	۹۲۲۸	۲۰.۰۰
۱.۳۹۸۵	۵۰.۰۰	۳۸۸۱	۴۲۱۰	۳۷۵۰	۹۲۱۶	۱۰.۰۰
۱.۴۰۱۴	۶۰.۰۰	۳۹۰۷	۴۲۴۵	۳۵۵۹	۹۲۰۵	۰.۰۰
۱.۴۰۴۳	۱۰.۰۰	۳۹۳۴	۴۲۷۹	۳۳۶۹	۹۱۹۴	۵۰.۰۰
۱.۴۰۷۲	۲۰.۰۰	۳۹۶۱	۴۳۱۴	۳۱۸۳	۹۱۸۳	۴۰.۰۰
۱.۴۱۰۲	۳۰.۰۰	۳۹۸۷	۴۳۴۸	۲۹۹۸	۹۱۷۱	۳۰.۰۰
۱.۴۱۳۱	۴۰.۰۰	۴۰۱۴	۴۳۸۳	۲۸۱۷	۹۱۵۹	۲۰.۰۰
۱.۴۱۶۰	۵۰.۰۰	۴۰۴۱	۴۴۱۷	۲۶۳۷	۹۱۴۷	۱۰.۰۰
۱.۴۱۸۹	۶۰.۰۰	۴۰۶۷	۴۴۵۲	۲۴۶۰	۹۱۳۵	۰.۰۰
۱.۴۲۱۸	۱۰.۰۰	۴۰۹۴	۴۴۸۷	۲۲۸۶	۹۱۲۴	۵۰.۰۰
۱.۴۲۴۷	۲۰.۰۰	۴۱۲۰	۴۵۲۲	۲۱۱۴	۹۱۱۳	۴۰.۰۰
۱.۴۲۷۶	۳۰.۰۰	۴۱۴۷	۴۵۵۷	۱۹۴۴	۹۱۰۱	۳۰.۰۰
۱.۴۳۰۵	۴۰.۰۰	۴۱۷۳	۴۵۹۲	۱۷۷۵	۹۰۸۸	۲۰.۰۰
۱.۴۳۳۴	۵۰.۰۰	۴۲۰۰	۴۶۲۸	۱۶۰۹	۹۰۷۵	۱۰.۰۰
۱.۴۳۶۳	۶۰.۰۰	۴۲۲۶	۴۶۶۳	۱۴۴۵	۹۰۶۳	۰.۰۰
		سینوس متعم	انوارت متعم	انوارت	سینوس	زینہ
						رادبان

رادبان	زینہ	سینوس	تأثرات	تأثرات متم	سینوس متم		
۱۰۳۶۳	۲۵۰۰	۴۲۲۶	۴۶۶۳	۱۴۴۵	۹۰۶۳	۶۵۰۰	۱۰۳۴۵
۱۰۳۶۲	۱۰۰	۴۲۵۳	۴۶۹۹	۱۲۸۳	۹۰۵۱	۵۰۰	۱۰۳۱۶
۱۰۴۲۲	۲۰۰	۴۲۷۹	۴۷۳۴	۱۱۲۳	۹۰۴۸	۴۰۰	۱۰۲۸۶
۱۰۴۴۵	۳۰۰	۴۳۰۵	۴۷۷۰	۰۹۶۵	۹۰۲۶	۳۰۰	۱۰۲۵۷
۱۰۴۴۸	۴۰۰	۴۳۳۱	۴۸۰۶	۰۸۰۹	۹۰۱۳	۲۰۰	۱۰۲۲۸
۱۰۴۵۰	۵۰۰	۴۳۵۸	۴۸۴۱	۰۶۵۵	۹۰۰۱	۱۰۰	۱۰۱۹۹
۱۰۴۵۳	۶۰۰	۴۳۸۴	۴۸۷۷	۰۵۰۳	۸۹۸۸	۶۴۰۰	۱۰۱۷۰
۱۰۴۵۶	۱۰۰	۴۴۱۰	۴۹۱۳	۰۳۵۳	۸۹۷۵	۵۰۰	۱۰۱۴۱
۱۰۴۵۹	۲۰۰	۴۴۳۶	۴۹۵۰	۰۲۰۴	۸۹۶۲	۴۰۰	۱۰۱۱۲
۱۰۴۶۵	۳۰۰	۴۴۶۲	۴۹۸۶	۰۰۵۷	۸۹۴۹	۳۰۰	۱۰۰۸۳
۱۰۴۶۵	۴۰۰	۴۴۸۸	۵۰۲۲	۰۹۹۱۲	۸۹۳۶	۲۰۰	۱۰۰۵۴
۱۰۴۶۸	۵۰۰	۴۵۱۴	۵۰۵۹	۰۹۷۶۸	۸۹۲۳	۱۰۰	۱۰۰۲۵
۱۰۴۷۱	۶۰۰	۴۵۴۰	۵۰۹۵	۰۹۶۲۶	۸۹۱۰	۶۴۰۰	۱۰۰۹۹
۱۰۴۷۴	۱۰۰	۴۵۶۶	۵۱۳۲	۰۹۴۸۶	۸۸۹۷	۵۰۰	۱۰۰۶۶
۱۰۴۷۷	۲۰۰	۴۵۹۲	۵۱۶۹	۰۹۳۴۷	۸۸۸۴	۴۰۰	۱۰۰۳۷
۱۰۴۸۰	۳۰۰	۴۶۱۷	۵۲۰۶	۰۹۲۱۰	۸۸۷۰	۳۰۰	۱۰۰۰۸
۱۰۴۸۲	۴۰۰	۴۶۴۳	۵۲۴۳	۰۹۰۷۴	۸۸۵۷	۲۰۰	۱۰۰۷۹
۱۰۴۸۵	۵۰۰	۴۶۶۹	۵۲۸۰	۰۸۹۴۰	۸۸۴۳	۱۰۰	۱۰۰۵۰
۱۰۴۸۸	۶۰۰	۴۶۹۵	۵۳۱۷	۰۸۸۰۷	۸۸۲۹	۶۴۰۰	۱۰۰۲۱
۱۰۴۹۱	۱۰۰	۴۷۲۰	۵۳۵۴	۰۸۶۷۶	۸۸۱۶	۵۰۰	۱۰۰۹۲
۱۰۴۹۴	۲۰۰	۴۷۴۶	۵۳۹۲	۰۸۵۴۶	۸۸۰۳	۴۰۰	۱۰۰۶۳
۱۰۴۹۷	۳۰۰	۴۷۷۲	۵۴۳۰	۰۸۴۱۸	۸۷۸۸	۳۰۰	۱۰۰۳۴
۱۰۵۰۳	۴۰۰	۴۷۹۷	۵۴۶۷	۰۸۲۹۱	۸۷۷۴	۲۰۰	۱۰۰۰۵
۱۰۵۰۳	۵۰۰	۴۸۲۳	۵۵۰۵	۰۸۱۶۵	۸۷۶۰	۱۰۰	۱۰۰۶۷
۱۰۵۰۶	۶۰۰	۴۸۴۸	۵۵۴۳	۰۸۰۴۰	۸۷۴۶	۶۴۰۰	۱۰۰۴۷
۱۰۵۰۹	۱۰۰	۴۸۷۴	۵۵۸۱	۰۷۹۱۷	۸۷۳۲	۵۰۰	۱۰۰۱۷
۱۰۵۱۲	۲۰۰	۴۸۹۹	۵۶۱۹	۰۷۷۹۶	۸۷۱۸	۴۰۰	۱۰۰۸۸
۱۰۵۱۴	۳۰۰	۴۹۲۴	۵۶۵۸	۰۷۶۷۵	۸۷۰۴	۳۰۰	۱۰۰۵۹
۱۰۵۱۷	۴۰۰	۴۹۵۰	۵۶۹۶	۰۷۵۵۶	۸۶۸۹	۲۰۰	۱۰۰۳۰
۱۰۵۲۰	۵۰۰	۴۹۷۵	۵۷۳۵	۰۷۴۳۷	۸۶۷۵	۱۰۰	۱۰۰۰۱
۱۰۵۲۳	۶۰۰	۵۰۰۰	۵۷۷۴	۰۷۳۲۱	۸۶۶۰	۶۴۰۰	۱۰۰۴۷
سینوس متم	سینوس متم	تأثرات متم	تأثرات	سینوس	زینہ	رادبان	

رایان	زینہ	سینوس	آثرانت	آثرانت منجم	سینوس منجم	
۰۰۵۲۳۶	۳۰ ۰۰	۰۰۵۰۰۰	۰۰۵۷۷۴	۰۱۷۳۲۱	۰۰۸۶۶۰	۰۰۴۷۲
۰۰۵۲۶۵	۱۰	۰۰۵۰۲۵	۰۰۵۸۱۲	۰۱۷۲۰۵	۰۰۸۶۴۶	۰۰۴۴۳
۰۰۵۲۹۴	۲۰	۰۰۵۰۵۰	۰۰۵۸۵۱	۰۱۷۰۹۰	۰۰۸۶۳۱	۰۰۴۱۴
۰۰۵۳۲۳	۳۰	۰۰۵۰۷۵	۰۰۵۸۹۰	۰۱۶۹۷۷	۰۰۸۶۱۶	۰۰۳۸۵
۰۰۵۳۵۲	۴۰	۰۰۵۱۰۰	۰۰۵۹۳۰	۰۱۶۸۶۴	۰۰۸۶۰۱	۰۰۳۵۶
۰۰۵۳۸۱	۵۰	۰۰۵۱۲۵	۰۰۵۹۶۹	۰۱۶۷۵۳	۰۰۸۵۸۷	۰۰۳۲۷
۰۰۵۴۱۱	۶۰	۰۰۵۱۵۰	۰۰۶۰۰۹	۰۱۶۶۴۳	۰۰۸۵۷۲	۰۰۲۹۷
۰۰۵۴۴۰	۷۰	۰۰۵۱۷۵	۰۰۶۰۴۸	۰۱۶۵۳۴	۰۰۸۵۵۷	۰۰۲۶۸
۰۰۵۴۶۹	۸۰	۰۰۵۲۰۰	۰۰۶۰۸۸	۰۱۶۴۲۶	۰۰۸۵۴۲	۰۰۲۳۹
۰۰۵۴۹۸	۹۰	۰۰۵۲۲۵	۰۰۶۱۲۸	۰۱۶۳۱۹	۰۰۸۵۲۶	۰۰۲۱۰
۰۰۵۵۲۷	۱۰۰	۰۰۵۲۵۰	۰۰۶۱۶۸	۰۱۶۲۱۲	۰۰۸۵۱۱	۰۰۱۸۱
۰۰۵۵۵۶	۱۱۰	۰۰۵۲۷۵	۰۰۶۲۰۸	۰۱۶۱۰۷	۰۰۸۴۹۶	۰۰۱۵۲
۰۰۵۵۸۵	۱۲۰	۰۰۵۲۹۹	۰۰۶۲۴۹	۰۱۶۰۰۳	۰۰۸۴۸۰	۰۰۱۲۳
۰۰۵۶۱۴	۱۳۰	۰۰۵۳۲۴	۰۰۶۲۸۹	۰۱۵۹۰۰	۰۰۸۴۶۵	۰۰۰۹۴
۰۰۵۶۴۳	۱۴۰	۰۰۵۳۴۸	۰۰۶۳۳۰	۰۱۵۷۹۸	۰۰۸۴۵۰	۰۰۰۶۵
۰۰۵۶۷۲	۱۵۰	۰۰۵۳۷۳	۰۰۶۳۷۱	۰۱۵۶۹۷	۰۰۸۴۳۴	۰۰۰۳۶
۰۰۵۷۰۱	۱۶۰	۰۰۵۳۹۸	۰۰۶۴۱۲	۰۱۵۵۹۷	۰۰۸۴۱۸	۰۰۰۰۷
۰۰۵۷۳۰	۱۷۰	۰۰۵۴۲۲	۰۰۶۴۵۳	۰۱۵۴۹۷	۰۰۸۴۰۳	۰۰۹۷۷
۰۰۵۷۶۰	۱۸۰	۰۰۵۴۴۶	۰۰۶۴۹۴	۰۱۵۳۹۹	۰۰۸۳۸۷	۰۰۹۴۸
۰۰۵۷۸۹	۱۹۰	۰۰۵۴۷۱	۰۰۶۵۳۶	۰۱۵۳۰۱	۰۰۸۳۷۱	۰۰۹۱۹
۰۰۵۸۱۸	۲۰۰	۰۰۵۴۹۵	۰۰۶۵۷۷	۰۱۵۲۰۴	۰۰۸۳۵۵	۰۰۸۹۰
۰۰۵۸۴۷	۲۱۰	۰۰۵۵۱۹	۰۰۶۶۱۹	۰۱۵۱۰۸	۰۰۸۳۳۹	۰۰۸۶۱
۰۰۵۸۷۶	۲۲۰	۰۰۵۵۴۴	۰۰۶۶۶۱	۰۱۵۰۱۳	۰۰۸۳۲۳	۰۰۸۳۲
۰۰۵۹۰۵	۲۳۰	۰۰۵۵۶۸	۰۰۶۷۰۳	۰۱۴۹۱۹	۰۰۸۳۰۷	۰۰۸۰۳
۰۰۵۹۳۴	۲۴۰	۰۰۵۵۹۲	۰۰۶۷۴۵	۰۱۴۸۲۶	۰۰۸۲۹۰	۰۰۷۷۴
۰۰۵۹۶۳	۲۵۰	۰۰۵۶۱۶	۰۰۶۷۸۷	۰۱۴۷۳۳	۰۰۸۲۷۴	۰۰۷۴۵
۰۰۵۹۹۲	۲۶۰	۰۰۵۶۴۰	۰۰۶۸۳۰	۰۱۴۶۴۱	۰۰۸۲۵۸	۰۰۷۱۶
۰۰۶۰۲۱	۲۷۰	۰۰۵۶۶۴	۰۰۶۸۷۳	۰۱۴۵۵۰	۰۰۸۲۴۱	۰۰۶۸۷
۰۰۶۰۵۰	۲۸۰	۰۰۵۶۸۸	۰۰۶۹۱۶	۰۱۴۴۶۰	۰۰۸۲۲۵	۰۰۶۵۷
۰۰۶۰۸۰	۲۹۰	۰۰۵۷۱۲	۰۰۶۹۵۹	۰۱۴۳۷۰	۰۰۸۲۰۸	۰۰۶۲۸
۰۰۶۱۰۹	۳۰۰	۰۰۵۷۳۶	۰۰۷۰۰۲	۰۱۴۲۸۱	۰۰۸۱۹۲	۰۰۵۹۹
رایان	زینہ	سینوس	آثرانت	آثرانت منجم	سینوس منجم	

رادیان	زینہ	سینوس	تائرانت	تائرانت متقم	سینوس متقم	
۰۰ ۶۱۰۹	۳۵ ۰۰	۰۰ ۵۷۳۶	۰۰ ۷۱۰۲	۰۱ ۴۲۸۱	۰۱ ۸۱۹۲	۰۰ ۹۵۹۹
۰۰ ۶۱۳۸	۰۱ ۰۰	۰۰ ۵۷۶۰	۰۰ ۷۰۴۶	۰۱ ۴۱۹۳	۰۱ ۸۱۷۵	۰۰ ۹۵۷۰
۰۰ ۶۱۶۷	۰۲ ۰۰	۰۰ ۵۷۸۳	۰۰ ۷۰۰۹	۰۱ ۴۱۰۶	۰۱ ۸۱۵۸	۰۰ ۹۵۴۱
۰۰ ۶۱۹۶	۰۳ ۰۰	۰۰ ۵۸۰۷	۰۰ ۷۱۳۳	۰۱ ۴۰۱۹	۰۱ ۸۱۴۱	۰۰ ۹۵۱۲
۰۰ ۶۲۲۵	۰۴ ۰۰	۰۰ ۵۸۳۱	۰۰ ۷۱۷۷	۰۱ ۳۹۲۴	۰۱ ۸۱۲۴	۰۰ ۹۴۸۳
۰۰ ۶۲۵۴	۰۵ ۰۰	۰۰ ۵۸۵۴	۰۰ ۷۲۲۱	۰۱ ۳۸۴۸	۰۱ ۸۱۰۷	۰۰ ۹۴۵۴
۰۰ ۶۲۸۳	۰۶ ۰۰	۰۰ ۵۸۷۸	۰۰ ۷۲۶۵	۰۱ ۳۷۶۴	۰۱ ۸۰۹۰	۰۰ ۹۴۲۵
۰۰ ۶۳۱۲	۰۱ ۰۰	۰۰ ۵۹۰۱	۰۰ ۷۳۱۰	۰۱ ۳۶۸۰	۰۱ ۸۰۷۳	۰۰ ۹۳۹۶
۰۰ ۶۳۴۱	۰۲ ۰۰	۰۰ ۵۹۲۵	۰۰ ۷۳۵۵	۰۱ ۳۵۹۷	۰۱ ۸۰۵۶	۰۰ ۹۳۶۷
۰۰ ۶۳۷۰	۰۳ ۰۰	۰۰ ۵۹۴۸	۰۰ ۷۴۰۰	۰۱ ۳۵۱۴	۰۱ ۸۰۳۹	۰۰ ۹۳۳۸
۰۰ ۶۴۰۰	۰۴ ۰۰	۰۰ ۵۹۷۲	۰۰ ۷۴۴۵	۰۱ ۳۴۳۲	۰۱ ۸۰۲۱	۰۰ ۹۳۰۹
۰۰ ۶۴۲۹	۰۵ ۰۰	۰۰ ۵۹۹۵	۰۰ ۷۴۹۰	۰۱ ۳۳۵۱	۰۱ ۸۰۰۴	۰۰ ۹۲۷۹
۰۰ ۶۴۵۸	۰۶ ۰۰	۰۰ ۶۰۱۸	۰۰ ۷۵۳۶	۰۱ ۳۲۷۰	۰۱ ۷۹۸۶	۰۰ ۹۲۵۰
۰۰ ۶۴۸۷	۰۱ ۰۰	۰۰ ۶۰۴۱	۰۰ ۷۵۸۱	۰۱ ۳۱۹۰	۰۱ ۷۹۶۹	۰۰ ۹۲۲۱
۰۰ ۶۵۱۶	۰۲ ۰۰	۰۰ ۶۰۶۵	۰۰ ۷۶۲۷	۰۱ ۳۱۱۱	۰۱ ۷۹۵۱	۰۰ ۹۱۹۲
۰۰ ۶۵۴۵	۰۳ ۰۰	۰۰ ۶۰۸۸	۰۰ ۷۶۷۳	۰۱ ۳۰۳۲	۰۱ ۷۹۳۴	۰۰ ۹۱۶۳
۰۰ ۶۵۷۴	۰۴ ۰۰	۰۰ ۶۱۱۱	۰۰ ۷۷۲۰	۰۱ ۲۹۵۴	۰۱ ۷۹۱۶	۰۰ ۹۱۳۴
۰۰ ۶۶۰۳	۰۵ ۰۰	۰۰ ۶۱۳۴	۰۰ ۷۷۶۶	۰۱ ۲۸۷۶	۰۱ ۷۸۹۸	۰۰ ۹۱۰۵
۰۰ ۶۶۳۲	۰۶ ۰۰	۰۰ ۶۱۵۷	۰۰ ۷۸۱۴	۰۱ ۲۷۹۹	۰۱ ۷۸۸۰	۰۰ ۹۰۷۶
۰۰ ۶۶۶۱	۰۱ ۰۰	۰۰ ۶۱۸۰	۰۰ ۷۸۶۰	۰۱ ۲۷۲۳	۰۱ ۷۸۶۲	۰۰ ۹۰۴۷
۰۰ ۶۶۹۰	۰۲ ۰۰	۰۰ ۶۲۰۲	۰۰ ۷۹۰۷	۰۱ ۲۶۴۷	۰۱ ۷۸۴۴	۰۰ ۹۰۱۸
۰۰ ۶۷۲۰	۰۳ ۰۰	۰۰ ۶۲۲۵	۰۰ ۷۹۵۴	۰۱ ۲۵۷۲	۰۱ ۷۸۲۶	۰۰ ۸۹۸۸
۰۰ ۶۷۴۹	۰۴ ۰۰	۰۰ ۶۲۴۸	۰۰ ۸۰۰۲	۰۱ ۲۴۹۷	۰۱ ۷۸۰۸	۰۰ ۸۹۵۹
۰۰ ۶۷۷۸	۰۵ ۰۰	۰۰ ۶۲۷۱	۰۰ ۸۰۵۰	۰۱ ۲۴۲۳	۰۱ ۷۷۹۰	۰۰ ۸۹۳۰
۰۰ ۶۸۰۷	۰۶ ۰۰	۰۰ ۶۲۹۳	۰۰ ۸۰۹۸	۰۱ ۲۳۴۹	۰۱ ۷۷۷۱	۰۰ ۸۹۰۱
۰۰ ۶۸۳۶	۰۱ ۰۰	۰۰ ۶۳۱۶	۰۰ ۸۱۴۶	۰۱ ۲۲۷۶	۰۱ ۷۷۵۳	۰۰ ۸۸۷۲
۰۰ ۶۸۶۵	۰۲ ۰۰	۰۰ ۶۳۳۸	۰۰ ۸۱۹۵	۰۱ ۲۲۰۳	۰۱ ۷۷۳۵	۰۰ ۸۸۴۳
۰۰ ۶۸۹۴	۰۳ ۰۰	۰۰ ۶۳۶۱	۰۰ ۸۲۴۳	۰۱ ۲۱۳۱	۰۱ ۷۷۱۶	۰۰ ۸۸۱۴
۰۰ ۶۹۲۳	۰۴ ۰۰	۰۰ ۶۳۸۳	۰۰ ۸۲۹۲	۰۱ ۲۰۵۹	۰۱ ۷۶۹۸	۰۰ ۸۷۸۵
۰۰ ۶۹۵۲	۰۵ ۰۰	۰۰ ۶۴۰۶	۰۰ ۸۳۴۲	۰۱ ۱۹۸۸	۰۱ ۷۶۷۹	۰۰ ۸۷۵۶
۰۰ ۶۹۸۱	۰۶ ۰۰	۰۰ ۶۴۲۸	۰۰ ۸۳۹۱	۰۱ ۱۹۱۸	۰۱ ۷۶۶۰	۰۰ ۸۷۲۷
		سینوس متقم	تائرانت متقم	تائرانت	سینوس	رادیان





۱۹۵۴

۵۱۲

11A.

کتابخانه حضرت میرزا محمد تقی خان  
۱۱۸۵  
تبریز

[illegible]